SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS

Recordemos que un sistema de m ecuaciones con n incógnitas es un sistema de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Donde: a_{ij} son números reales y se llaman <u>coeficientes</u> del sistema, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ son números reales y reciben el nombre de <u>términos independientes</u> , y $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son las incógnitas del sistema.

Si todos los términos independientes son nulos, el sistema se llama <u>homogéneo</u>.

La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se le llama <u>matriz de los coeficientes</u>, y la matriz que se obtiene de la anterior añadiendo los términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ se denomina <u>matriz ampliada</u>.

NOTACIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA: Si designamos por X a la matriz columna formada por las incógnitas y por B a la matriz columna de los términos independientes el sistema se puede escribir así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B$$

NOTACIÓN VECTORIAL: Designando por $C_1, C_2, \ldots, C_n$ las columnas de la matriz A, el sistema puede escribirse también así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n = B$$

Esta relación expresa el vector columna B como combinación lineal de las columnas de la matriz de los coeficientes del sistema. Si tal combinación lineal existe, los coeficientes de las columnas son precisamente la solución del sistema.

Ejemplos:

1.- Escribir en forma matricial el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 6y - z = 5 \\ x + y = -8 \end{cases}$

La forma matricial es: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$

2.- Escribir en forma vectorial el sistema anterior.

La forma vectorial es: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$

TEOREMA DE ROUCHE – FROBENIUS .- Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y solo si el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada.

Demostración: El sistema puede escribirse en forma vectorial $C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n = B$

$\Rightarrow$) Si el sistema es compatible, existe al menos una solución $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ tal que.
$C_1s_1 + C_2s_2 + \ldots + C_ns_n = B$, por lo tanto la matriz columna de los términos independientes es combinación lineal de las columnas de la matriz de los coeficientes A $\Rightarrow$ rango A = rango A^*

$\Leftarrow$) Si rango A = rango A^*, entonces la columna de los términos independientes es combinación lineal de las columnas de la matriz A y por tanto existen n números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ tales que.

$B = C_1s_1 + C_2s_2 + \ldots + C_ns_n$. Por lo tanto $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ es una solución del sistema $\Rightarrow$ el sistema es compatible.

Sistemas de ***m*** ecuaciones con ***n*** incógnitas

$$\begin{cases} \text{Si rango} A = \text{rango} A^* = r, \text{sistema compatible} \begin{cases} \text{Determinado: si } r = n \\ \text{Indeterminado: si } r < n \end{cases} \\ \\ \text{Si rango } A \neq \text{rango } A^*, \text{sistema Incompatible} \end{cases}$$

Sistemas homogéneos: Un sistema de ecuaciones lineales se dice homogéneo si los términos independientes son todos nulos. Por lo tanto todo sistema homogéneo es siempre compatible. (Pues rango A = rango A^*)

a) Si rango A = nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema **compatible determinado**, solo tiene la solución (0, 0, … , 0), llamada solución trivial.

b) Si rango A < nº de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

SISTEMAS DE CRAMER

Definición: Un sistema de ecuaciones lineales es un sistema de Cramer si el número de ecuaciones es igual al de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema es distinto de cero.

Ejemplo: El sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ es de Cramer pues el número de ecuaciones es igual al de incógnitas y $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$.

Proposición.- Todo sistema de Cramer es compatible determinado (tiene solución única).
Demostración: Consideremos un sistema de Cramer de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$ su expresión matricial $$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$ abreviadamente

AX = B. Como el sistema es de Cramer $|A| \neq 0 \Rightarrow$ existe A^{-1} y por lo tanto:
$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ de donde obtenemos:

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_1 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

....

$$x_n = \frac{b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

x_i es igual al determinante de la matriz obtenida de A al cambiar la columna i-ésima por la columna de los términos independientes, dividido por el determinante de la matriz A de los coeficientes del sistema.

Ejemplos:

1.- Resuelve, aplicando la regla de Cramer, el sistema $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 7y = 1 \end{cases}$

Es un sistema de Cramer pues det(A) = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

La solución es: x = $\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \dfrac{-2}{1} = -2$, $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{1} = 1$

2.- Resuelve, aplicando la regla de Cramer, el sistema $\begin{cases} x - y + 5z = 13 \\ 3x - 2y + z = 12 \\ x + y + 2z = 9 \end{cases}$

El sistema es de Cramer al ser $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$.

Aplicando la regla de Cramer, la solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -1 & 5 \\ 12 & -2 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{100}{25} = 4, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 13 & 5 \\ 3 & 12 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{25}{25} = 1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 13 \\ 3 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{50}{25} = 2$$

<u>MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA</u>

Si en un sistema de ecuaciones lineales A X = B, donde A es una matriz cuadrada y se cumple que $|A| \neq 0 \Rightarrow$ existe A^{-1} y por lo tanto: $A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$

Ejemplo: Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa: $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x+y+z=-2 \\ x-2y-3z=1 \end{cases}$

Solución: Expresión matricial: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 1 + 4 + 1 + 2 + 6 = 11 \neq 0 \Rightarrow$ existe A^{-1}. Sabemos que $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj.}(A))^t$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 7,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 5,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3,$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1..$

Adj (A)= $\begin{pmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Tenemos: $A\cdot X = B \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 7 & -2 & -3 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 \\ 22 \\ -22 \end{pmatrix}$

Por lo tanto: $x = -1$, $y = 2$, $z = -2$

EJERCICIOS:

Ejercicio 1.- Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro m y resolverlo:

$$\begin{cases} x-2my+3z=0 \\ 2x-3y+mz=0 \\ y+2z=0 \end{cases},\ |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2m & 3 \\ 2 & -3 & m \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7m = 0 \Rightarrow m = 0$$

Si $m \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 3 = número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible determinado; solo admite la solución trivial: x = 0, y = 0, z = 0.

Si m = 0 ($|A| = 0 \Rightarrow$ rango A < 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2 < nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

Solución: $\left.\begin{matrix} x = -3z \\ x-3y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -6x-3y=0,\ y=-2z \Rightarrow \begin{cases} x=-3t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$

Ejercicio 2.- Estudiar el siguiente sistema según los valores de m y resolverlo siempre que sea posible

$\left.\begin{matrix} x+my+z=m+2 \\ x+y+mz=-2(m+1) \\ mx+y+z=m \end{matrix}\right\}$ Si rango A = rango A^* = 3 (nº de incógnitas) el sistema será compatible determinado.

Veamos que valores de m anulan al determinante de A, para esos valores ya no es posible que sea determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^3 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

a) Si m ≠ 1 y m ≠ –2, | A | ≠ 0 ⇒ rango A = rango A^* = 3 = número de incógnitas, el sistema es compatible determinado:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m+2 & m & 1 \\ -2(m+1) & 1 & m \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}}{m^3 - 3m + 2} = \cdots, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m+2 & 1 \\ 1 & -2(m+1) & m \\ m & m & 1 \end{vmatrix}}{m^3 - 3m + 2} = \cdots, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & m+2 \\ 1 & 1 & -2(m+1) \\ m & 1 & m \end{vmatrix}}{m^3 - 3m + 2} = \cdots$$

b) Si **m =1** (|A| = 0 ⇒ rango A < 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango A = 1, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **,** $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ y

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ⇒ rango A^* = 2 ⇒ rango A = 1 ≠ rango A^* = 2 ⇒ Sistema Incompatible.

c) Si **m = –2** (|A| = 0 ⇒ rango A < 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ rango A^* = 2

Rango A = 2 = rango A^* < número de incógnitas ⇒ el sistema es compatible indeterminado:

$$\left.\begin{matrix} x - 2y = -z \\ x + y = 2 + 2z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} -z & -2 \\ 2+2z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-z + 4 + 4z}{3} = \frac{4}{3} + z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & 2+2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2 + 2z + z}{3} = \frac{2}{3} + z.\quad \text{Solución: } x = \frac{4}{3} + t\ ,\ y = \frac{2}{3} + t\ ,\ z = t$$

Ejercicio 3.- Discutir según los valores de "**a**" el sistema:

$$\left.\begin{aligned} (1-a)x + (2a+1)y + (2a+2)z &= a \\ ax + ay &= 2a + 2 \\ 2x + (a+1)y + (a-1)z &= a^2 - 2a + 9 \end{aligned}\right\}$$

Hallaremos los valores de que anulan det (A)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 2a+1 & 2a+2 \\ a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \end{vmatrix} = -a^3 + 3a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(-a^2 + 3a - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -a^2 + 3a - 2 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases} \end{cases}$$

a) Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ y $a \neq 2 \Rightarrow$ | A | ≠ 0 ⇒ rango A = rango A^*= 3 = número de incógnitas ⇒ sistema compatible determinado.

b) Si a = 0, ($|A| = 0 \Rightarrow$ rango A < 3), $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ rango } A^* = 3 .$$

Por lo tanto: rango A = 2 $\neq$ rango A^*= 3 $\Rightarrow$ sistema incompatible.

c) Si a = 1, ($|A| = 0 \Rightarrow$ rango A < 3), $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow$ rango A = 2

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rango } A^* = 2$$

rango A = rango A^*= 3 < nº de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible indeterminado.

d) Si a = 2, ($|A| = 0 \Rightarrow$ rango A < 3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -26 \neq 0 \Rightarrow \text{ rango } A^* = 3$$

rango A = 2 $\neq$ rango A^*= 3 $\Rightarrow$ sistema incompatible.

<u>Ejercicio 4</u>.- Estudiar según los valores del parámetro a el sistema. $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ ax + (a+3)y + 3z = 1 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & a+3 & 3 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ a & a+3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Vamos a calcular el rango de A:

El rango de A es distinto de cero pues | 1 | $\neq$ 0. Menores de orden dos que contengan a | 1 |:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & a+3 \end{vmatrix} = a + 3 - 2a = -a + 3 = 0 \Rightarrow a = 3$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 3 \end{vmatrix} = 3 - a = 0 \Rightarrow a = 3$. El rango de A será 1 si a = 3 y rango A = 2 si a $\neq$ 3.

a) Si a $\neq$ 3 rango A = rango A^*= 2 < número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Si a = 3 rango A = 1

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow$ rango A^* = 2 $\neq$ rango A $\Rightarrow$ el sistema es incompatible.