DETERMINANTES

Determinante de una matriz cuadrada de orden dos

Definición: Dada una matriz cuadrada de orden dos $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se llama determinante de A al numero real:

$$\textbf{Det (A)} = |\,A\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

El determinante de una matriz cuadrada de orden dos es igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Ejemplos:

1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3$ 2. $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7$ 3. $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 6 = 4$

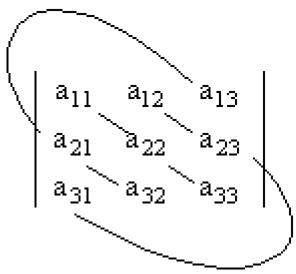
Determinante de una matriz cuadrada de orden tres

Dada una matriz cuadrada de orden tres $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, se llama determinante de A al numero real:

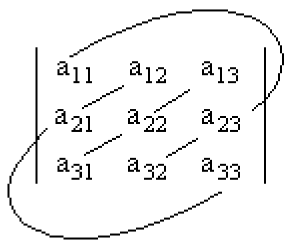
$$\textbf{Det (A)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Esta expresión es fácil de recordar mediante la regla de Sarrus:



Términos con signo +



Términos con signo –

Los productos precedidos por el signo más están formados por los elementos de la diagonal principal, y los de las diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto.

Análogamente se forman los productos con signo menos pero tomando como referencia la diagonal secundaria.

Ejemplos:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 12 + 36 - 45 - 6 - 16 = -9$

2. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 60 - 60 = 0$

Determinantes de orden n

Definición: Una permutación σ en el conjunto {1, 2, 3, ..., n} es una ordenación de los elementos: 1, 2, 3, ..., n

Ejemplo: En el conjunto{1, 2, 3} las permutaciones posibles son: σ_1= 123, σ_2 =132, σ_3 =213, σ_4 = 231, σ_5 = 312, σ_6 =321.

El número total de permutaciones de los elementos {1, 2, 3, ...,n} es n!

Definición: Se llama permutación principal de {1, 2, 3, ..., n}, a la permutación en la que los elementos se encuentran en el orden natural, es decir, a la permutación 123...n

Definición: Diremos que dos elementos de una permutación forman **inversión** si están colocados en distinto orden que en la permutación principal.

Ejemplo: En {1, 2, 3, 4}, sea la permutación 3241.

Para saber el número total de inversiones, contaremos las inversiones que forma cada elemento de la permutación con los elementos que le siguen.

	Nº de inversiones
El 3 forma inversión con el 2 y el 1	2
El 2 forma inversión con el 1	1
El 4 forma inversión con el 1	1
	Total: 4

Definición: Se dice que una permutación es **par** si tiene un número par de inversiones, en caso contrario se dice que es **impar.**

De las n! Permutaciones que se pueden formar con n elementos la mitad son pares y la mitad impares.

En el desarrollo de un determinante, al hablar de permutaciones de filas o de columnas nos referimos a sus subíndices. Así dado el término $a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$ de un determinante de tercer orden se tiene:

Permutaciones de fila: 123

Permutaciones de columnas: 312

Definición: Dada la matriz cuadrada de orden n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se llama determinante de A al número real que se obtiene al sumar todos los productos posibles de n elementos de la matriz de modo que en cada producto figure un único elemento de cada fila y de cada columna precedido del signo + o – según que la permutación de filas y columnas sea de la misma paridad o no.

El determinante de una matriz se designa por **det (A)** **| A |**

Ejemplo: Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, al calcular su determinante los únicos productos posibles son $a_{11}\, a_{22}$ y $a_{12}\, a_{21}$. En el elemento $a_{11}\, a_{22}$ la permutación de fila 12 y la de columna 12 tienen la misma paridad (ambas son pares) por lo tanto al calcular el determinante irá precedido del signo +.

En $a_{12}\, a_{21}$ la permutación de fila 12 es par y la de columna 21 es impar, por lo tanto al calcular el determinante irá precedido del signo –.

$$\textbf{Det (A)} = |\,A\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Propiedades de los determinantes

1. El determinante de una matriz cuadrada es igual al de su traspuesta: | A | = | A^t |

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |\,A\,| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2\,;\; A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |\,A\,| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

2. Si cada elemento de una determinada fila (o columna) es suma de varios sumandos, el determinante es igual a la suma de los determinantes que se van formando al sustituir dicha fila (columna) por los primeros, segundos, ..., sumandos.

$$\begin{vmatrix} a & b & c+d \\ a' & b' & c'+d' \\ a'' & b'' & c''+d'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}$$

3. Si multiplicamos o dividimos todos los elementos de una fila (columna) por un número distinto de 0 el determinante queda multiplicado o dividido por ese número.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 5\cdot 3 & 1 & 0 \\ 5\cdot 1 & 2 & 1 \\ 5\cdot 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

4. Si se permutan entre si dos filas (columnas) de un determinante, este cambia de signo.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

5. Si todos los elementos de una fila o columna son ceros, el determinante vale cero.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a' & b' & 0 \\ a'' & b'' & 0 \end{vmatrix} = ab'0 + 0a'b'' + b0a'' - 0b'a'' - a0b'' - aba'0 = 0$

6. Si un determinante tiene dos filas (columnas) iguales, vale cero.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = ayc + bza + cxb - ayc - bza - cxb = 0$

7. Si un determinante tiene dos filas (columnas) proporcionales, vale cero.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 - 10 = 0$ (la segunda columna es igual a la primera multiplicada por 2)

8. Si una fila (columna) es combinación lineal de las demás el determinante es cero.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 2 + 0 - 6 + 1 + 0 = 0$ (la 3ª columna = 2 · 1ª + 2ª)

9. Si a los elementos de una fila (columna) se les suma otra fila (columna) paralela multiplicada por un número el determinante no varía.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -10 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 51$ (2ª fila – 1ª fila·3, 3ª fila – 1ª · 2)

10. Si a los elementos de una fila (columna) se les suma una combinación lineal de las restantes, el determinante no varía.

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-3\cdot 1+1 & 1 & 1 \\ 2-3\cdot 1+1 & 1 & 1 \\ 5-3\cdot 2+1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Comprobación: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 4 + 5 - 5 - 2 - 6 = -1$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$

3. Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, | A·B | = | A |·| B |

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}$, | A |·| B | = $\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=2(-5)=-10$,

| A·B | = $\left|\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}8&1\\2&-1\end{vmatrix}=-10$

Ejercicio: Se sabe que $\begin{vmatrix}x&5&1\\y&0&1\\z&3&1\end{vmatrix}=1$. Explicando que propiedades de los determinantes se utilizan y sin desarrollar, calcular el valor de $\begin{vmatrix}y&2y&y+2\\x&2x+5&x+2\\z&2z+3&z+2\end{vmatrix}$.

Solución:

$$\begin{vmatrix}y&2y&y+2\\x&2x+5&x+2\\z&2z+3&z+2\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}-\begin{vmatrix}x&2x&x+2\\y&2y+5&y+2\\z&2z+3&z+2\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}-\begin{vmatrix}x&2x&x+2\\y&2y&y+2\\z&2z&z+2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x&0&x+2\\y&5&y+2\\z&3&z+2\end{vmatrix}\overset{(3)}{=}-\begin{vmatrix}x&0&x+2\\y&5&y+2\\z&3&z+2\end{vmatrix}$$

$$\overset{(4)}{=}-\begin{vmatrix}x&0&x\\y&5&y\\z&3&z\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x&0&2\\y&5&2\\z&3&2\end{vmatrix}\overset{(5)}{=}-2\begin{vmatrix}x&0&1\\y&5&1\\z&3&1\end{vmatrix}=-2$$

(1) Al Permutar 1ª y 2ª fila el determinante cambia de signo.
(2) Los elementos de la 2ª columna los descomponemos en dos sumandos.
(3) El primer determinante tiene dos columnas proporcionales, por lo tanto es igual a cero.
(4) Los elementos de la 3ª columna los descomponemos en dos sumandos.
(5) El primer determinante tiene dos columnas iguales y por lo tanto es igual a cero, el segundo determinante tiene la 3ª columna multiplicada por 2 luego el determinante queda multiplicado por 2.

Menor complementario y adjunto

Definición: Sea A una matriz cuadrada de orden n, Se llama **menor complementario del elemento a_{ij}** de A al determinante de la matriz obtenida de A al suprimir la fila "i" y la columna "j". Se representa por α_{ij}

Ejemplo: En el determinante de cuarto orden

$\begin{vmatrix}2&1&1&0\\3&1&2&9\\6&-1&4&2\\1&3&4&-2\end{vmatrix}$ el menor complementario de a_{21} ($a_{21}=3$) es:

$$\alpha_{21}=\begin{vmatrix}1&1&0\\-1&4&2\\3&4&-2\end{vmatrix}=-12$$

Definición: Sea A una matriz cuadrada de orden n, Se llama **adjunto del elemento a_{ij}** de A, y se representa por A_{ij}, al menor complementario de a_{ij} precedido del signo + o – según que i + j sea par o impar. Es decir $A_{ij}=(-1)^{i+j}\alpha_{ij}$

Proposición: El determinante de una matriz cuadrada de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila (columna) cualquiera por sus adjuntos respectivos.

Es decir, tomando la fila "i" se tiene: | A | = $a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$

Ejemplos:

1. El determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ lo podemos calcular por los adjuntos de la segunda columna:

$$|A| = 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -0 - 4 - 0 = -4$$

2. Calcula $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Desarrollando por los adjuntos de la primera fila se tiene:

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -10 + 5 + 24 = 19$$

Método practico para calcular determinantes de orden n

Para calcular determinantes de orden n, la regla de cálculo más sencilla es la de desarrollar por filas (o columnas) haciendo antes el mayor número de ceros utilizando las propiedades de los determinantes.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & 7 & -3 \\ 2 & 7 & -5 & 4 \\ -3 & 2 & -2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -10 & 15 & -23 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 11 & -8 & 22 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -10 & 15 & -23 \\ 1 & -1 & -6 \\ 11 & -8 & 22 \end{vmatrix} = -689$$

Se podría seguir el proceso y obtener un determinante en forma triangular, es decir que todos lo elementos que están por debajo de la diagonal principal son ceros. Un determinante en forma triangular, es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\cdots a_{nn}$$

Menor de orden n de una matriz – Rango de una matriz

Definición.– Sea A una matriz de orden m x n. Los elementos pertenecientes a la intersección de r filas y r columnas, siendo $1 \le r \le \min.(m, n)$, forman una submatriz cuadrada de orden r cuyo determinante recibe el nombre de **menor de orden r de la matriz A**.

Ejemplo.– Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

Los menores de orden tres de la matriz A son:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 12; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -16; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -32; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -28$$

Entre los menores de orden 2 figuran:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0\,; \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12\,; \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4\,; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

Obviamente los menores de orden 1 son todos y cada uno de los elementos de A.

Sea A una matriz de orden mxn. Si A tiene un **menor de orden p, no nulo,** entonces las **p filas** (columnas) que determinan tal menor son **linealmente independientes.**

Recordemos que el rango de una matriz es el número de vectores fila linealmente independientes que coincide con el número de columnas linealmente independientes.

<u>El rango de una matriz A de dimensión mxn es el orden del mayor menor no nulo.</u>

Cálculo práctico del rango de una matriz:

Sea A = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, como la matriz no es la matriz cero, su rango es mayor o igual que 1 Para determinar si tiene rango ≥ 2, se busca un menor (determinante) de orden 2 no nulo. Por ejemplo: $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$

Para determinar si tiene rango 3, partiendo del menor de orden 2 distinto de cero, se estudiarán todos los posibles menores de orden 3 que lo contengan. Si todos ellos son nulos, el rango de A es 2. Si por el contrario, alguno de ellos es distinto de cero, el rango es 3.

En este caso: $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ pero $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A = 3$.

Ejercicios:

1.– Estudia el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro a.

Solución: $\det(M) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} = a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$

Si a≠ 1 y a ≠ −1 det(A) ≠ 0 y por lo tanto rango A = 3

Si a =1 A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, det (A) = 0, existe algún menor de orden 2 distinto de cero, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, por lo tanto rango A = 2.

Si a = −1 A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, det (A) = 0, existe algún menor de orden 2 distinto de cero, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, por lo tanto rango A = 2.

2.– Halla el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro a:

Solución:

Como la matriz A no es la matriz cero, su rango es mayor o igual que 1. Para determinar si tiene rango ≥ 2, se busca un menor (determinante) de orden 2 no nulo. Por ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Para determinar si tiene rango 3, partiendo del menor de orden 2 distinto de cero, se estudiarán todos los posibles menores de orden 3 que lo contengan.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (a - 2)\,(2\,a - 1) = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ y } a = ½$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (a - 2)\,(2\,a^2 - 1) \Rightarrow a = 2 \text{ y } a = \pm\sqrt{1/2}\,.$$

Ambos menores de orden 3 se anulan a la vez para a = 2, por lo tanto: Si a = 2 rango A = 2 y si a≠2 rango A = 3 pues al menos uno de los menores de orden 3 es distinto de cero.

Matriz inversa

Dada una matriz cuadrada A, llamamos matriz inversa de A a la matriz que representamos por A^{-1} y que cumple: $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Definición.- Matriz adjunta de una matriz cuadrada A. Se llama matriz adjunta de una matriz cuadrada A y se representa por Adj.(A), a la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento a_{ij} por su adjunto A_{ij}.

Ejemplo: Hallar la matriz adjunta de la matriz A = $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7\,, A_{21} = 0\,, A_{22} = -2\,, A_{23} = -2\,, A_{31} = -2\,, A_{32} = 4$$

$$A_{33} = 6.\ \text{entonces: Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Proposición.- Sea una matriz cuadrada de orden n, su **matriz inversa**, si existe, es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\text{Adj.}(A)\right)^t$$

Proposición.- Sea A un matriz cuadrada de orden n. A es inversible ⇔ | A | ≠0.

⇒) Si A tiene inversa $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, | I | = 1, $|AA^{-1}| = |A|\,|A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$.

⇐) | A | ≠ 0 se puede calcular 1/|A| y por el teorema anterior $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\text{Adj.}(A)\right)^t$ es la matriz inversa de A.

Ejercicios:

1. Calcular la matriz inversa de A = $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1.- Se calcula | A | = $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$

2.- Se calcula la matriz adjunta de A (ver ejercicio anterior): Adj.(A) = $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

3.- Se calcula la traspuesta de la adjunta: $(\text{Adj.}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

4.- La matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\text{Adj.}(A)\right)^t = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Halla una matriz X que verifique AX + B = C, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:
$AX + B = C$, $AX = C - B$, $A^{-1}(AX) = A^{-1}(C - B)$, $(A^{-1}A)X = A^{-1}(C - B)$, $I\,X = A^{-1}(C - B)$,
$X = A^{-1}(C - B)$
Vamos a calcular la matriz inversa de A, A^{-1}:

$$|A| = 8,\ \text{Adj. }(A) = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ [\text{Adj. }(A)]^t = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$C - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ ; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1/2 & -3/4 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Halla los valores del parámetro p para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}$ no tiene inversa. ¿Tiene inversa para p = 2?. En caso afirmativo calcularla.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{vmatrix} = p^3 - p = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ p = \pm 1 \end{cases}$$

. Por lo tanto A no tiene inversa para p = 0, 1, −1.

Para los demás valores hay inversa ⇒ tiene inversa para p = 2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = 6$,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6..$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix},\ [\text{Adj. }(A)]^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar A^n para todo entero positivo *n*. [1 punto]
b) Calcular, si existe, la inversa de la matriz A y de la matriz $I_3 + A$. [1,5 puntos] (junio 2001)
Solución:

a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, para $n \geq 3$, A^n es la matriz nula.

b) Como $|A| = 0$, la matriz A no tiene inversa

La matriz $I_3 + A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y $|I_3 + A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ tiene inversa.

La matriz ajunta $\text{Adj}(I_3 + A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2 & -a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [\text{Adj}(I_3 + A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (I_3 + A)^{-1} = \frac{[\text{Adj}(I_3 + A)]^t}{|I_3 + A|} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$