MATRICES

1.- Matrices

Sea K un cuerpo.

Definición.- Una tabla de mxn elementos de K dispuestos en m filas y n columnas de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

recibe el nombre de matriz de dimensión mxn.

En una matriz el elemento a_{ij} ocupa el lugar determinado por la fila i y la columna j. Así, el termino a_{35} es el que está en la 3ª fila y 5ª columna.

Abreviadamente, una matriz como la anterior se designa también por: $\left(a_{ij}\right)_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}$ o bien $A_{m,n} = (a_{ij})$.

El conjunto de todas las matrices de orden mxn se representa por $\mathcal{M}_{mxn}$.

Si en una matriz el número de filas es igual al número de columnas n, se dice que es una **matriz cuadrada** de orden n

El conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n se representa por $\mathcal{M}_{nxn}$ o bien simplemente por $\mathcal{M}_{n}$.

Ejemplo: La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ es una matriz de dimensión 3x4.

Definición: Dos matrices son iguales cuando tiene la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales.

2.- Tipos de matrices

Matriz fila: Una matriz de dimensión 1xn se dice que es una matriz fila. En una matriz fila sus elementos están dispuestos en una única fila.

Ejemplo: D = (5 -1 0 3)

Matriz columna: Una matriz de dimensión mx1 se dice que es una matriz columna. En una matriz columna sus elementos están dispuestos en una única columna.

Ejemplo: $E = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Matriz cuadrada: Es la que tiene el mismo número de filas que de columnas. En caso contrario se llama rectangular.

Ejemplo: Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 0 \\ \sqrt{5} & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ son dos matrices cuadradas de orden tres.

En una matriz cuadrada de orden n se llama **diagonal principal** al conjunto formado por todos los elementos que tienen subíndices iguales a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}. Los elementos de una matriz cuadrada de orden n a_{ij} con i + j = n + 1 forman la diagonal secundaria.

Matriz triangular. Una matriz **cuadrada A** se llama **triangular** cuando todos los términos situados por encima o por debajo de la diagonal principal son nulos.

Si los términos situados por debajo de la diagonal principal son cero se llama matriz triangular **superior** y si lo son los que están por encima se llama matriz triangular **inferior**.

Ejemplo: La matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular superior.

Matriz diagonal. Una matriz cuadrada donde los elementos que no están situados en la diagonal principal son todos cero se llama matriz **diagonal.**

Matriz escalar. Es toda matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Matriz unidad (identidad) es la matriz escalar cuyos elementos de la diagonal principal valen uno. La matriz unidad de orden n se designa por $\mathbf{I}_{n.}$

Ejemplos: $$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Matriz unidad}}_{Matrices escalares}}_{Matrices diagonales}$$

Matriz nula (cero) es la matriz con todos los elementos nulos.

3.- Suma de matrices y producto de un escalar por una matriz. Propiedades.

Suma de matrices.

Para que dos matrices se puedan sumar es necesario que tengan la misma dimensión.

Definición.- Sean $\mathbf{A = (a_{ij})}$ y $\mathbf{B = (b_{ij})}$ dos matrices de dimensión mxn, la **suma** de A y B es otra matriz de la misma dimensión mxn dada por: $\mathbf{A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})}$**.**

Es decir la matriz suma A + B se obtiene sumando los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas matrices.

Definición:- Sea K un cuerpo y $A = (a_{ij})$ una matriz de elementos de K de dimensión mxn. El producto de un escalar $\lambda \in K$ por una matriz $A = (a_{ij})$ de dimensión mxn es otra matriz de la misma dimensión mxn dada por: $\boldsymbol{\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})}$**.** Es decir la matriz $\boldsymbol{\lambda A}$ se obtiene multiplicando por $\boldsymbol{\lambda}$ cada elemento de la matriz A.

Ejemplos:

1.- $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & 4 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 & 8 \\ -2 & -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 12 & 12 \\ 2 & -5 & 10 & 2 \end{pmatrix}$

2.- $3\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 9 & 3 & 18 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Propiedades de la suma de matrices

La suma de matrices de orden mxn es una operación interna en el conjunto $\mathcal{M}_{mxn}$, es decir las matrices de orden mxn se pueden sumar y el resultado es otra matriz mxn.

Propiedades:

1. Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$, $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{mxn}$

2.- Existe elemento neutro: La matriz nula, $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ de dimensión m x n, que tiene todos los elementos iguales a cero, es el elemento neutro de la suma de matrices ya que :

$A + 0 = 0 + A = A, \ \forall A \in \mathcal{M}_{mxn}$

3.- Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{mxn}$ tiene **opuesta** $-A = (-a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mxn}$: $A + (-A) = (-A) + A = 0$

4.- Conmutativa: $A + B = B + A$

($\mathcal{M}_{mxn}$, +) es un grupo conmutativo o abeliano

Propiedades del producto de un escalar por una matriz

a) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

b) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

c) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

d) $1A = A$

De lo visto anteriormente se deduce que **($\mathcal{M}_{mxn}$, + , .K) es un espacio vectorial sobre K.**

4.- Producto de matrices - Matriz inversa

Definición: El producto de una matriz fila $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ de dimensión 1xn por una matriz columna $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ de dimensión nx1, se define de la siguiente forma: $AB = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$

El resultado es una matriz cuadrada de orden 1.

Para poder multiplicar una matriz fila por una matriz columna ambas deben tener el mismo número de elementos.

Ejemplo: $(2\ 4\ 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = 2.1 + 4.5 + 1.(-7) = 15$

Dadas dos matrices A y B diremos que son **multiplicables** en este orden y se escribe A·B ó AB si el **número de columnas de A es igual al número de filas de B.**

Definición .- El **producto** de una matriz $A = (a_{ij})$ de dimensión **mxn** por una matriz $B = (b_{ij})$ de dimensión **nxp,** es otra matiz $AB = (c_{ij})$ de dimensión **mxp**, tal que cada elemento c_{ij} se obtiene multiplicando la fila i de la primera matriz por la columna j de la segunda matriz.

Si $A_1, A_2, ..., A_m$ son las filas de la matriz A y $B^1, B^2, ..., B^p$ las columnas de la matriz B:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B^1 & A_1B^2 & \dots & A_1B^p \\ A_2B^1 & A_2B^2 & \dots & A_2B^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_mB^1 & A_mB^2 & \dots & A_mB^p \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x2+1x1+(-1)x4 & 2x1+1x0+(-1)x5 & 2x0+1x0+(-1)2 \\ 3x2+1x1+2x4 & 3x1+1x0+2x5 & 3x0+1x0+2x2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 15 & 13 & 4 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de matrices:

Asociativa: Si A, B, C son tres matrices tales que A(BC) está definida, entonces (AB)C también lo está y se tiene: A(BC) = (AB)C

Ejemplo:

Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$. Entonces:

$BC = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 10 & 12 \\ 25 & 30 \end{pmatrix}$ y $A(BC) = \begin{pmatrix} 25 & 30 \\ -25 & -30 \end{pmatrix}$; $AB = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ y $(AB)C = \begin{pmatrix} 25 & 30 \\ -25 & -30 \end{pmatrix}$

Distributiva respecto de la suma: Si A, B, C son tres matrices tales que la operación A(B + C) está definida, se verifica que A(B + C) = AB + AC.

El producto de matrices en general no es conmutativo: No cabe hablar, en general, de conmutatividad del producto, pues si A es de dimensión mxn y B de nxp, el producto BA es imposible a no ser que p = m. Pero en este caso se obtendrían los resultados: AB de dimensión m x m y BA de dimensión n x n que no son comparables salvo que m = n, esto es, que las matrices sean cuadradas y del mismo orden. Pero incluso en este caso el **producto de matrices no es conmutativo** como lo prueba el ejemplo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

En el conjunto $\mathcal{M}_n$ de matrices cuadradas de orden n, la matriz $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ es el elemento neutro (unidad) para el producto, ya que si $A \in \mathcal{M}_n$ se tiene: A I = I A = A.

Definición.- Sea A una **matriz cuadrada** de orden n; si existe otra matriz cuadrada de orden n, B tal que AB = BA = I, se dice que la matriz A es **inversible ó regular,** y la matriz B se llama **inversa** de A y se representa por A^{-1} .

Proposición.- Si una matriz cuadrada tiene inversa, esta es única.

Demostración: Si B y C fueran inversas de A se tendría AB = BA = I, AC = CA = I $\Rightarrow$ AB = AC

Multiplicando por C: C(AB) = C(AC) $\Rightarrow$ (CA)B = (CA)C $\Rightarrow$ IB = IC $\Rightarrow$ B = C.

Proposición.- El producto de dos matrices inversibles es inversible y su inversa es: $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Ejercicio 1: Sean $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula x e y para que MN = NM.

b) Calcula M^{1997} y M^{1998}

Solución:

a) $MN=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&0\\y&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y&0&0\\x&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; $NM=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&0\\y&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&x\\0&0&y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}y&0&0\\x&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&x\\0&0&y\end{pmatrix}\Rightarrow y=1,\ x=0$

b) $M^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I,\ M^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=M,\ M^4=I,\ M^5=M,\ \ldots$

Se ve que si el exponente es par es igual a la matriz unidad y si es impar es igual a M, por lo tanto $M^{1997}=M$ y $M^{1998}=I$.

5.- Matriz traspuesta. Matriz simétrica y matriz antisimétrica.

Matriz traspuesta. Dada una matriz A, se llama matriz traspuesta de A, y se representa por A^t , a la matriz que se obtiene cambiando las filas por columnas.

La primera fila de A es la primera columna de A^t, la segunda fila de A es la segunda columna de A^t, etc.

Si A es una dimensión de dimensión mxn la matriz A^t es de dimensión nxm.

Propiedades:

1.- $(A^t)^t = A$

2.- $(A + B)^t = A^t + B^t$

3.- $(kA)^t = k\,A^t$

4.- $(AB)^t = B^t\,A^t$

Matriz simétrica. Una matriz cuadrada de orden n se llama **simétrica** si coincide con su traspuesta.

Ejemplos: La matriz $\begin{pmatrix}4&1&6\\1&-1&5\\6&5&0\end{pmatrix}$ es simétrica.

En una matriz simétrica los elementos que son simétricos respecto de la diagonal principal son iguales.

Matriz antisimétrica (hemisimétrica). Una matriz cuadrada de orden n se llama **antisimétrica o hemisimétrica** si coincide con la opuesta de la traspuesta.: $A = -A^t$.

En una matriz antisimétrica los elementos que son simétricos respecto de la diagonal principal son opuestos y los elementos de la diagonal principal son nulos.

Ejemplo: La matriz $\begin{pmatrix}0&3&-5\\-3&0&4\\5&-4&0\end{pmatrix}$ es una matriz antisimétrica.

6.- Rango de una matriz.

Rango de un conjunto de vectores

Se llama rango de un conjunto de vectores $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n\}$ al máximo número de vectores linealmente independientes.

Rango de una matriz

Dada una matriz A de dimensión mxn, se puede interpretar como m vectores (que son las filas) o como n vectores columna (que son las columnas)

Por tanto si consideramos las filas y las columnas de una matriz como vectores, podemos hablar de dependencia e independencia lineal de las mismas y de rango por filas y rango por columnas.

Se puede demostrar que el rango por filas de una matriz es igual al rango por columnas. (El número de filas linealmente independientes es igual al número de columnas linealmente independientes)

Definición.- El **rango o característica** de una matriz A es igual al máximo número de filas o columnas linealmente independientes.

<u>Cálculo del rango por el método de Gauss</u>

Las transformaciones elementales de filas o columnas que dejan invariante el rango de una matriz son:

1.- Si se permutan entre si dos filas (o columnas) paralelas se obtiene una matriz del mismo rango.

2.- Si se multiplican o se dividen todos los elementos de una fila (o columna) por un mismo número no nulo, el rango no varia.

3.- Si a una fila (o columna) se le suma o se le resta otra paralela, el rango no varía.

4.- El rango de una matriz no varía si se suprimen :

- Las filas (o columnas) nulas
- Las filas (o columnas) proporcionales a otras.
- Las filas (o columnas) que sean combinación lineal de otras.

Las transformaciones anteriores nos permiten calcular el rango de una matriz por el método de Gauss.

Este método consiste en escalonar una matriz ($a_{ij} = 0$ si $i < j$) y una vez escalonada, el rango será igual al número de filas no nulas, que coincide con el número de filas linealmente independientes.

Ejemplo 1: Calcular el rango de la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -25 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Solución: rango A = 3

Ejemplo 2: Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Rango A} = \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 13 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = 3$$

Ejemplo 3: Estudia el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro a. ¿Existe algún valor de a para el que sea rango (M) = 1?.

Solución:

Rango M = rango $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ = rango $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2a & 1-a^2 \end{pmatrix}$ = rango $\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$

$1 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

Si a = 1, Rango M = rango $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Si a = -1, Rango M = rango $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Si $a \neq \pm 1$, rango M = 3.

No existe ningún valor de a para el cual el rango M = 1, pues para a = 1 y a = –1 el rango es dos y para a $\neq \pm 1$ el rango es tres.

Ejercicios:

1. Halla el rango de la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & a-2 & a+1 \\ 1 & -1 & a^2+1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro a. ¿Tiene inversa cuando a = 0?. En caso afirmativo hállala.

Solución: Vamos a calcular el rango utilizando el método de Gauss

Rango A = rango $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix}$ $\quad a-1=0 \Rightarrow a=1$, $\quad a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$

Si a = 1 Rango A = rango $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$. Si a = -1 Rango A = rango $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Si $a \neq \pm 1$ rango A = 3

Para a = 0 tiene inversa pues rango A = 3 $\Rightarrow$ las tres filas (columnas) son linealmente independientes.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Considera la ecuación matricial: X·A = 2B, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & m^2+m \end{pmatrix}$ con m un parámetro real y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) ¿Para que valor del parámetro m existe una única matriz X que verifica la ecuación anterior?
b) Si es posible resuelve la ecuación matricial para m = 0.

Solución:

a) Si el rango de A es dos la matriz A tiene inversa es decir existe una única matriz A^{-1} que cumple: $(X\cdot A)\cdot A^{-1} = 2B\,A^{-1} \Rightarrow X\cdot(A\cdot A^{-1}) = 2B\,A^{-1} \Rightarrow X\cdot I = 2B\,A^{-1} \Rightarrow X = 2B\,A^{-1}$, y por lo tanto la solución será única. Veamos para que valores de m el rango de A es dos.

$$\text{rango } A = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & m^2+m \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & m^2+m-2 \end{pmatrix},\ m^2+m-2=0\ \begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases}$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, rango A = 2 $\Rightarrow$ la solución es única

Si m = 1 rango A = rango $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$ no tiene inversa.

Si m = –2 rango A = rango $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$ no tiene inversa.

b) Para m = 0 la matriz A tiene inversa y por lo tanto la ecuación matricial tiene solución única:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),\ \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right),\ \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right),\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = 2B\,A^{-1} \Rightarrow X = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Otra forma: Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+2b & 2a \\ 2c+2d & 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

2 a + 2b = 4, 2 a = 2, 2c + 2d = 8, 2c = 0 $\Rightarrow$ a = 1, b = 1, c = 0 y d = 4 $\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ donde x, y, z son desconocidos.

a) Calcular las matrices (AxB) + C y 3D.

b) Sabiendo que (AxB) + C = 3D, plantear un sistema de ecuaciones para encontrarlos valores de x, y, z.

c) Encontrar, si es posible, una solución.

Solución:

a)(AxB) + C = $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \\ -x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y+2z \\ -x+y-z \end{pmatrix}$; $3D = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Queda: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+2z=0 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$

c) Por Gauss : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Soluciones: –3y = –6 $\Rightarrow$ y = 2, x = 3 – y – z $\Rightarrow$ x = 1 – y $\Rightarrow \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$ Para cada valor real de *t* se obtiene una solución. Por ejemplo, si t = 0 sale x = 1, y = 2 y z = 0.

4. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$ halla:

a) La matriz inversa de C.
b) La matriz X que verifique: AB + CX = D.

Solución:

a) $C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) $AB + CX = D \Rightarrow CX = D - AB \Rightarrow C^{-1}(CX) = C^{-1}(D - AB) \Rightarrow (C^{-1}C)X = C^{-1}(D - AB) \Rightarrow$

$X = C^{-1}(D - AB)$

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}; \ D - AB = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Otra forma: $AB + CX = D \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} a+2c=-2 \\ 3a+4c=-6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a=-2 \\ c=0 \end{matrix}\right. , \quad \left.\begin{matrix} b+2d=3 \\ 3b+4d=7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} b=1 \\ d=1 \end{matrix}\right. \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$