Ejercicios de integrales

1. $\int\left(\sqrt[5]{x^3}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx=\int\left(x^{3/5}-3x^{-2/3}\right)dx=\dfrac{x^{8/5}}{8/5}-3\,\dfrac{x^{1/3}}{1/3}+k=\dfrac{5x\,\sqrt[5]{x^3}}{8}+9\,\sqrt[3]{x}+k$

2. $\int\left(\dfrac{3}{x^4}-\sqrt[3]{x}+\dfrac{5}{\sqrt[4]{x^3}}-7x^6\right)dx=3\int x^{-4}dx-\int x^{1/3}dx+5\int x^{-3/4}dx-7\int x^6dx=$

$3\dfrac{x^{-3}}{-3}-\dfrac{x^{4/3}}{4/3}+5\dfrac{x^{1/4}}{1/4}-7\dfrac{x^7}{7}+k=-\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{x^4}}{4}+20\,\sqrt[4]{x}-x^7+k=$

$-\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3\cdot x\cdot\sqrt[3]{x}}{4}+20\,\sqrt[4]{x}-x^7+k$

3. $\int\left(3+x^2\right)^4\cdot x\,dx=\dfrac{1}{2}\int\left(3+x^2\right)^4\cdot 2x\,dx=\dfrac{\left(3+x^2\right)^5}{5}+K$

4. $\int\dfrac{4x-1}{\left(2x^2-x+1\right)^6}\,dx=\int\left(2x^2-x+1\right)^{-6}(4x-1)\,dx=\dfrac{\left(2x^2-x+1\right)^{-5}}{-5}+k=-\dfrac{1}{5\left(2x^2-x+1\right)^5}+K$

5. $\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx=\dfrac{1}{3}\int 3x^2\left(1+x^3\right)^{1/2}\,dx=\dfrac{1}{3}\dfrac{\left(1+x^3\right)^{3/2}}{3/2}+K=\dfrac{2}{9}\sqrt{\left(1+x^3\right)^3}+k$

6. $\int\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx=\int\left(x^2+1\right)^{-1/3}x\,dx=\dfrac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)^{-1/3}2x\,dx=\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(x^2+1\right)^{2/3}}{2/3}+k=\dfrac{3\left(x^2+1\right)^{2/3}}{4}+k$

7. $\int(e^{2x}+2)^5e^{2x}\,dx=\dfrac{1}{2}\int(e^{2x}+2)^5e^{2x}\,2\,dx=\dfrac{1}{2}\dfrac{(e^{2x}+2)^6}{6}+k=\dfrac{(e^{2x}+2)^6}{12}+k$

8. $\int(1-x^2)\cdot\sqrt{x}\cdot dx=\int\sqrt{x}\,dx-\int x^2\sqrt{x}\,dx=\int x^{1/2}dx-\int x^{5/2}dx=\dfrac{2\,x^{3/2}}{3}-\dfrac{2\,x^{7/2}}{7}+k=\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}-$

$\dfrac{2\sqrt{x^7}}{7}+k=\dfrac{2x\sqrt{x}}{3}-\dfrac{2x^3\sqrt{x}}{7}+k$

9. $\int\dfrac{4x+4}{x^2+2x+6}\,dx=2\int\dfrac{2x+2}{x^2+2x+6}\,dx=2\ln(x^2+2x+6)+k$

10. $\int\dfrac{\operatorname{sen}3x}{5+\cos 3x}\,dx=\dfrac{-1}{3}\int\dfrac{-3\operatorname{sen}3x}{5+\cos 3x}\,dx=-\dfrac{1}{3}\ln\left|\,5+\cos 3x\,\right|+k\;)$

11. $\int\dfrac{x+1}{x^2+1}dx=\int\dfrac{x}{x^2+1}dx+\int\dfrac{1}{x^2+1}dx=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{2x}{x^2+1}dx+\int\dfrac{1}{x^2+1}dx=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\text{arc tag }x+k$

12. $\int\dfrac{2x}{1+x^4}dx=\int\dfrac{2x}{1+\left(x^2\right)^2}dx=\text{arc tag }\,x^2+k$

13. $\int\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx=\text{arc sen }e^x+k$

14. $\int\dfrac{3}{\sqrt{1-(x+2)^2}}dx=3\int\dfrac{1}{\sqrt{1-(x+2)^2}}dx=3\text{ arc sen }(x+2)+k$

15. $\int\operatorname{sen}\left(x^2+1\right)\cdot x\,dx=\dfrac{1}{2}\int\operatorname{sen}\left(x^2+1\right)\cdot 2x\,dx=-\dfrac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)+k$

16. $\int e^{\operatorname{sen}^2 x}\operatorname{sen}2x\,dx=\int e^{\operatorname{sen}^2 x}\,2\operatorname{sen}x\cos x\,dx=e^{\operatorname{sen}^2 x}+k$

17. $\int \text{sen } x \cos x\, (\text{sen } x + \cos x)\, dx = \int \text{sen}^2 x \cdot \cos x\, dx + \int \cos^2 x \cdot \text{sen } x\, dx = \dfrac{\text{sen}^3 x}{3} - \dfrac{\cos^3 x}{3} + k$

18. $\int \text{sen}^5 x\, dx = \int \text{sen } x \cdot (1 - \cos^2 x)^2\, dx = \int \text{sen } x\, dx - \int 2\cos^2 x \cdot \text{sen } x\, dx + \int \cos^4 x \cdot \text{sen } x\, dx =$

$-\cos x + 2\dfrac{\cos^3 x}{3} - \dfrac{\cos^5 x}{5} + k$

19. $\int \dfrac{7^{\sqrt{x}}}{5\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{5}\int 7^{\sqrt{x}}\, \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \dfrac{2 \cdot 7^{\sqrt{x}}}{5 \cdot \ln 7} + k$

20. $\int \text{tag}^2 x\, dx = \int \left(1 + \text{tag}^2 x - 1\right) dx = \int \left(1 + \text{tag}^2 x\right) dx - \int dx = \text{tag } x - x + k$

21. $\int \dfrac{x^2 + 2x + 1}{3x}\, dx = \int \dfrac{x^2}{3x}\, dx + \int \dfrac{2x}{3x}\, dx + \int \dfrac{1}{3x} dx = \dfrac{1}{3}\int x\, dx + \dfrac{2}{3}\int dx + \dfrac{1}{3}\int \dfrac{1}{x}\, dx =$

$\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x^2}{2} + 2x + \ln|\, x\,|\right) + k$

22. $\int \dfrac{e^{\ln x}}{x}\, dx = \int e^{\ln x}\, \dfrac{1}{x}\, dx = e^{\ln x} + k$. Si tenemos en cuenta que $e^{\ln x} = x$, $\int \dfrac{e^{\ln x}}{x}\, dx = \int \dfrac{x}{x} dx =$

$\int dx = x + k$

23. $\int \dfrac{dx}{3 + 3x^2} = \int \dfrac{dx}{3\left(1 + x^2\right)} = \dfrac{1}{3}\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = \dfrac{1}{3}\text{ arc tag } x + k$

24. $\int \dfrac{e^{\text{arc tag } x} + (\text{arc tag } x)^3 + x}{1 + x^2}\, dx = \int e^{\text{arc tag } x}\, \dfrac{1}{1 + x^2}\, dx + \int (\text{arc tag } x)^3\, \dfrac{1}{1 + x^2}\, dx + \frac{1}{2}\int \dfrac{2x}{1 + x^2}\, dx =$

$e^{\text{arc tag } x} + \dfrac{(\text{arc tag } x)^4}{4} + \ln|x| + k$

25. $\int \dfrac{(\ln x)^3}{x} dx$, hacemos el cambio $t = \ln x \Rightarrow dt = \dfrac{1}{x}\, dx$, sustituyendo: $\int \dfrac{(\ln x)^3}{x} dx = \int t^3\, dt =$

$\dfrac{t^4}{4} + k = \dfrac{(\ln x)^4}{4} + k$

26. $\int \dfrac{2x \ln (1 + x^2)}{1 + x^2}\, dx$, hacemos $t = \ln (1 + x^2) \Rightarrow dt = \dfrac{2x}{1 + x^2}\, dx$, sustituyendo: $\int \dfrac{2x \ln (1 + x^2)}{1 + x^2}\, dx$

$= \int t\, dt = \dfrac{t^2}{2} + k = \dfrac{\left(\ln (1 + x^2)\right)^2}{2} + k$

27. $\int \dfrac{\text{tag } x + 3}{\cos^2 x}\, dx$, hacemos el cambio $t = \text{tag } x + 3 \Rightarrow dt = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx \Rightarrow dx = \cos^2 x\, dt$,

sustituyendo: $\int \dfrac{\text{tag } x + 3}{\cos^2 x}\, dx = \int t\, dt = \dfrac{t^2}{2} + k = \dfrac{(\text{tag } x + 3)^2}{2} + k$

28. $\int \dfrac{\cos (\ln x)}{x} dx$, hacemos el cambio $t = \ln x \Rightarrow dt = \dfrac{1}{x} dx \Rightarrow dx = x\, dt$, sustituyendo:

$\int \dfrac{\cos (\ln x)}{x} dx = \int \cos t\, dt = \text{sen } t + k = \text{sen } (\ln x) + k$

29. $\int \dfrac{x^2}{\cos^2 x^3}\, dx$, hacemos $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2\, dx$, entonces $\int \dfrac{x^2}{\cos^2 x^3}\, dx = \frac{1}{3}\int \dfrac{dt}{\cos^2 t} dt = \text{tag } t + k =$
$\text{tag } x^3 + k$

30. $\int \frac{dx}{x \cdot sen^2 (\ln x)}$, hacemos t = ln x $\Rightarrow$ dt = $\frac{1}{x}$dx, entonces $\int \frac{dx}{x \cdot sen^2 (\ln x)} = \int \frac{dt}{sen^2\ t}$ = –cotag t + k = –cotag (ln x) + k

31. $\int \frac{\cos\ x}{1+sen^2 x}\ dx$, hacemos t = sen x, dt = cos x dx, $\int \frac{\cos x}{1+sen^2\ x} dx = \int \frac{1}{1+t^2} dt$ = arc tag t + k = arc tag (sen x) +k

32. $\int \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (1+x)}\ dx$, hacemos el cambio t^2 =x $\Rightarrow$ dx = 2t dt, sustituyendo tenemos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (1+x)}\ dx = \int \frac{1}{t\ (1+t^2)}\ 2t\ dt = 2\int \frac{1}{1+t^2}\ dt = 2 \text{ arc tag } t + k = 2 \text{ arc tag } \sqrt{x} + k$$

33. $\int x\sqrt{x-1}\ dx$,hacemos el cambio x – 1 = t^2 $\Rightarrow$ x = t^2 +1 $\Rightarrow$ dx = 2t dt , sustituyendo:

$$\int x\sqrt{x-1}\ dx = \int (t^2+1)\ t\ 2t\ dt = \int (2t^4+2t^2)\ dt = \int 2t^4\ dt + \int 2t^2\ dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + k =$$

$$\frac{2\sqrt{(x-1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3} + k = \frac{2(x-1)^2\sqrt{x-1}}{5} + \frac{2(x-1)\sqrt{x-1}}{3} + k$$

34. $\int \sqrt{1-x^2}dx$, hacemos el cambio x = sen t , dx = cos t dt:

$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \int \sqrt{1-sen^2\ t}\ \cos\ t\ dt = \int \sqrt{\cos^2\ t}\ \cos\ t\ dt = \int \cos^2\ t\ dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\ dt =$$

$= \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos\ 2t\ dt = \frac{t}{2} + \frac{sen\ \ 2t}{4} + k$. Ahora, poniendo t = arc sen x, y teniendo en cuenta que sen 2t = 2 sen t cos t = 2 sen t $\sqrt{1-sen^2 t} = 2x\sqrt{1-x^2}$, deshacemos el cambio de variables:

$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{\text{arcsen} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + k$$

35. $\int \ln\ x\ dx$. Hacemos $\begin{cases} u = \ln\ x \Rightarrow du = 1/x\ dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + K$$

36. $\int$arc tag x dx ; hacemos $\begin{cases} u = \text{arc tag } x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}\ dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{cases}$

$\int$arc tag x dx $= x \text{ arc tag } x - \int \frac{x}{1+x^2}\ dx = x \text{ arc tag } x - \frac{1}{2}\int \frac{x}{1+x^2}\ dx = x \text{ arc tag } x$ $-\frac{1}{2} \ln \left|1+x^2\right| + k$

$$\int \text{arc tag } x\ dx = x \text{ arc tag } x - \frac{1}{2} \ln \left|1+x^2\right| + k$$

37. $\int x^2 \cos\ x\ dx$. Hacemos $\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\ dx \\ dv = \cos\ x\ dx \Rightarrow v = sen\ x \end{cases}$ $\int x^2 \cos\ x\ dx = x^2\ sen x - 2\int x\ sen\ x\ dx$.

Para calcular $\int x \cdot sen\ x\ dx$ hacemos: $\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = sen\ x\ dx \Rightarrow v = -\cos\ x \end{cases}$

$\int x\cdot \text{sen } x\ dx = -x\cos x + \int \cos x\ dx = -x\cos x + \text{sen } x + C$

Por lo tanto:

$\int x^2 \cos x\ dx = x^2 \text{ sen } x - 2(-x\cos x + \text{sen } x) + K = x^2 \text{ sen } x + 2x\cos x - 2 \text{ sen } x + k$

38. $\int (x^2-3)e^x\ dx$. Hacemos $\begin{cases} u = x^2-3 \Rightarrow du = 2x\ dx \\ dv = e^x\ dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$

$\int (x^2-3)e^x\ dx = (x^2-3)e^x - 2\int x e^x\ dx$. Para calcular $\int x\cdot e^x\ dx$ hacemos:

$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x\ dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$ $\int x\cdot e^x\ dx = x\cdot e^x - \int e^x\ dx = x\cdot e^x - e^x + C$

Por lo tanto:

$\int (x^2-3)e^x\ dx = (x^2-3)e^x - 2\left(x\cdot e^x - e^x\right) + k = = (x^2-3)e^x - 2x\cdot e^x + 2e^x + k =$

$e^x\left(x^2-2x-1\right)+k$

39. $\int (x^3-1)\cdot \ln x\ dx$. $\left.\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow dx = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x^3-1\ dx \Rightarrow v = \dfrac{x^4}{4} - x \end{array}\right\}$ $\int (x^3-1)\cdot \ln x\ dx = \left(\dfrac{x^4}{4}-x\right)\ln x \ -$

$\int\left(\dfrac{x^4}{4}-x\right)\cdot\dfrac{1}{x}\ dx = \left(\dfrac{x^4}{4}-x\right)\ln x - \int\left(\dfrac{x^3}{4}-1\right)dx = \dfrac{(x^4-4x)\ln x}{4} - \dfrac{x^4}{16} + x + k$

40. $\int \sqrt{x}\cdot \ln x\ dx$. $\left.\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow dx = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = \sqrt{x}\ dx \Rightarrow v = \dfrac{2\cdot x^{3/2}}{3} \end{array}\right\}$ $\int \sqrt{x}\cdot \ln x\ dx = \dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}\cdot \ln x - \int \dfrac{2x^{3/2}}{3x}\ dx =$

$\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3}\cdot \ln x - \frac{2}{3}\int x^{1/2}\ dx = \dfrac{2\cdot x\cdot\sqrt{x}\cdot \ln x}{3} - \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}x^{3/2} + k = \dfrac{2\cdot x\cdot \sqrt{x}\cdot \ln x}{3} - \dfrac{4\cdot x\cdot\sqrt{x}}{9} + k$

41. $\int e^x \cos x\ dx$. Hacemos $\left.\begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow dx = e^x dx \\ dv = \cos x\ dx \Rightarrow v = \text{sen } x \end{array}\right\}$ $\int e^x \cos x\ dx = e^x \text{ sen } x - \int e^x \text{ sen } x\ dx$

Para calcular $\int e^x \text{sen } x\ dx$ hacemos $\left.\begin{array}{l} u = e^x \Rightarrow dx = e^x dx \\ dv = \text{sen } x\ dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array}\right\}$ $\int e^x \text{sen } x\ dx =$

$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x\ dx$. Por lo tanto: $\int e^x \cos x\ dx = e^x \text{ sen } x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\ dx \Rightarrow$

$2\int e^x \cos x\ dx = e^x \text{ sen } x + e^x \cos x \Rightarrow \int e^x \cos x\ dx = ½\left(e^x \text{sen } x + e^x \cos x\right) + k$

42. $\int \text{sen}^2 x\ dx$. $\left.\begin{array}{l} u = \text{sen } x \Rightarrow dx = \cos x\ dx \\ dv = \text{sen } x\ dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array}\right\}$ $\int \text{sen}^2 x\ dx = -\text{sen } x\cos x + \int \cos^2 x\ dx =$

$-\text{sen}x\cos x + \int\left(1-\text{sen}^2 x\right)dx = -\text{sen } x\cos x + \int dx - \int \text{sen}^2 x\ dx = -\text{sen } x \cos x + x - \int \text{sen}^2 x\ dx$

$\Rightarrow 2\int \text{sen}^2 x\ dx = -\text{sen } x\cos x + x \Rightarrow \int \text{sen}^2 x\ dx = \frac{1}{2}\left(-\text{sen } x\cos x + x\right) + k$

43. Calcular $\int \dfrac{5x^2-19x+2}{x^3-2x^2-5x+6}\ dx$

Las raíces o ceros del denominador son $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ y $x_3 = 3$, por lo tanto:

$x^3 - 2x^2 - 5x + 2 = (x-1)(x+2)(x-3)$.

$$\frac{5x^2-19x+2}{(x-1)(x+2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-3}=\frac{A(x+2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

$$5x^2-19x+2 = A(x+2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+2)$$

Para x = 1 $\quad -12=-6\,A \quad \Rightarrow \quad A=2$

Para x = -2 $\quad 60 = 15\,B \quad \Rightarrow \quad B = 4$

Para x = 3 $\quad -10 = 10\,C \quad \Rightarrow \quad C=-1$

La integral nos queda:

$$\int\frac{5x^2-19x+2}{x^3-2x^2-5x+6}dx=2\int\frac{1}{x-1}dx+4\int\frac{1}{x+2}dx-\int\frac{1}{x-3}dx=2\ln|x-1|+4\ln|x+2|-\ln|x-3|+K$$

44. $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^3-3x+2}\,dx$

La descomposición en factores del denominador es: $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$ por lo que:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$$x+1 = A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2$$

Para x = 1 $\Rightarrow 2 = 3\,A \;\Rightarrow\; A=\dfrac{2}{3}$

Para x = -2 $\Rightarrow -1 = 9\,C \Rightarrow C=-\dfrac{1}{9}$

Para x = 0 $\;\Rightarrow\; 1 = 2\,A - 2\,B + C \;\Rightarrow\; B=\dfrac{1}{9}$

$$\int\frac{x+1}{x^3-3x+2}\,dx==\frac{2}{3}\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\frac{1}{9}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{9}\int\frac{1}{x+2}dx=-\frac{2}{3}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{9}\ln|x+2|+K$$

45. Calcula la expresión de una función que pasa por el punto (1, 1) y que en dicho punto, la tangente a la curva coincide con la recta de ecuación x + 12y = 13 sabiendo que $f''(x)=x^2-1$.

Soluciones:

Este problema puede resolverse de dos formas fundamentalmente. La más corta es la siguiente:

Si $f''(x)=x^2-1\Rightarrow f'(x)=\int\left(x^2-1\right)dx=\dfrac{x^3}{3}-x+a$

$f(x)=\displaystyle\int\left(\frac{x^3}{3}-x+a\right)dx=\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{2}+ax+b;$ impongamos ahora las condiciones que deberá cumplir f(x).

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1\Rightarrow \dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{2}+a+b=1\Rightarrow a+b=\dfrac{17}{12}\\[2ex] f'(1)=-\dfrac{1}{12}\Rightarrow \dfrac{1}{3}-1+a=-\dfrac{1}{12}\Rightarrow a=\dfrac{7}{12}\end{array}\right\}\Rightarrow b=\frac{17}{12}-\frac{7}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

Por tanto $f(x)=\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{7}{12}x+\dfrac{5}{6}$. Nótese que la segunda condición que hemos impuesto es que la pendiente de la recta tangente ($m=-\dfrac{1}{12}$) debe coincidir con $f'(1)$.

46. Halla una función cuya derivada sea $f(x) = 4x^2 - 7x^2 + 5x - 1$ y que se anule para x = 1.

Solución:

Buscamos la integral indefinida de f(x) que es:

$$\int (4x^3 - 7x^2 + 5x - 1).dx = x^4 - \frac{7x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x + C$$

Como se anula para x = 1 tenemos: $1^4 - \frac{7.1^3}{3} + \frac{5.1^2}{2} - 1 + C = 0$ y se obtiene que C= - 1/6, por tanto, la función buscada es

$$F(x) = x^4 - \frac{7x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x - \frac{1}{6}$$

47. Halla la función G tal que G"(x) = 6x + 1; G(0) = 1 y G(1) = 0

Solución:

Nos dan la segunda derivada por lo que tenemos que integrar dos veces:

$$G'(x) = \int (6x + 1)dx = 3x^2 + x + K$$

$$G(x) = \int (3x^2 + x + C)dx = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + Kx + C$$

De G(0) = 1 resulta: C = 1 , (después de sustituir la x por 0.)

De G(1) = 0 obtenemos: 1+1/2+K+1= 0, (después de sustituir la x por 1) por lo que K = –5/2.

La función que buscamos es la siguiente: $G(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$

48. Utilizando el cambio de variable $t = e^x$, calcular $\int e^{x+e^x} dx$

Solución:

Si $t = e^x \Rightarrow dt = e^x\, dx$

Por lo tanto $\int e^{x+e^x} dx = \int e^x \cdot e^{e^x}\, dx = \int e^t\, dt = e^t + K$

Deshaciendo el cambio:

$$\int e^{x+e^x} dx = e^{e^x} + K$$

49. Utilizando el cambio de variable $t = \ln x$, calcular $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$

Solución:

Si $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx \Rightarrow dx = x\, dt \Rightarrow \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx = \frac{\ln t}{x \cdot t} x\, dt = \frac{\ln t}{t}\, dt$

Por lo tanto : $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx = \int \frac{\ln t}{t} dt = \int \ln t \cdot \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{(\ln t)^2}{2} + K = \frac{(\ln(\ln x))^2}{2} + K$

50. Halla una primitiva de f(x) = $\frac{-x}{\sqrt{1 - x^4}}$ que se anula en x = 1

Solución:

Hallamos todas las primitivas $\int \frac{-x}{\sqrt{1 - x^4}} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} dx = -\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} x^2 + K$

La primitiva que buscamos $F(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} x^2 + K$ debe cumplir F(1) = 0

$$-\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} 1 + K = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + K = 0 \Rightarrow K = \frac{\pi}{4} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} x^2 + \frac{\pi}{4}$$

51. Halla una primitiva de f(x) = $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$

Solución:

Hallamos todas las primitivas: $\int \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$. Para ello hacemos el cambio $t^2 = x \Rightarrow 2t\,dt = dx$

$\int \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \dfrac{1}{1+t}\,2t dt = \int \dfrac{2t}{1+t}\,dt$. Como numerador y denominador son del mismo grado

hacemos la división $2t = (1 + t) \cdot 2 - 2 \Rightarrow \dfrac{2t}{1+t} = 2 - \dfrac{2}{1+t} \Rightarrow \int \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx =$

$2\int dt - 2\int \dfrac{1}{1+t}\,dt = 2t - 2\ln|1+t| + K = = 2\sqrt{x} - 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + K$

Las distintas primitivas se pueden obtener dando valores a K. Para K = 0 se obtiene la primitiva F(x) = $= 2\sqrt{x} - 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|$

52. Calcula: $\int (3+|x|)\,dx$

Solución:

$$3+|x| = \begin{cases} 3-x & \text{si} \quad x<0 \\ 3+x & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \int (3+|x|)\,dx = \begin{cases} 3x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si} \quad x<0 \\ 3x + \dfrac{x^2}{2} + C & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

En x = 0 la función f(x) ha de ser continua $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(0) = C \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = K \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = C \end{array}\right\} \Rightarrow C = K$

$$\int (3+|x|)\,dx = \begin{cases} 3x - \dfrac{x^2}{2} + k & \text{si} \quad x<0 \\ 3x + \dfrac{x^2}{2} + K & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

53. Encuentra la función derivable F: [–1, 1] que cumple f(1) = –1 y

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\text{Si } x \ne 0 \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + K & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - x + C & \text{si } \ 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Hallamos k y c teniendo en cuenta que f(1) = –1 y que f(x) ha de ser continua en x = 0

$f(1) = -1 \Rightarrow e - 1 + C = -1 \Rightarrow C = -e$

f continua en x = 0: f(0) = $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} f(x) = k \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1-e\end{array}\right\} \Rightarrow k = 1 - e. \quad \text{Por lo tanto: } f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 1 - e & \text{si } -1 \le x < 0 \\ e^x - x - e & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

54. Calcula el valor de la integral $\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \text{ sen } x \, dx$

Solución:

En el intervalo considerado, la función f(x) = | x | sen x = $\begin{cases} -x \cdot \text{sen } x & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ x \cdot \text{sen } x & \text{si } x \in [0, 2\pi] \end{cases}$

Por lo tanto: $\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \text{ sen } x \, dx = \int_{-\pi}^{0} -x \text{ sen } x \, dx + \int_{0}^{2\pi} x \text{ sen } x \, dx$

Calculamos: $\int x \text{ sen } x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \text{sen } x + k$

$$\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \text{ sen } x \, dx = \int_{-\pi}^{0} -x \text{ sen } x \, dx + \int_{0}^{2\pi} x \text{ sen } x \, dx = [x \cos x - \text{sen } x]_{-\pi}^{0} + [-x \cos x + \text{sen } x]_{0}^{2\pi} = -\pi - 2\pi = -3\pi$$

55. Calcular las derivadas de las siguientes funciones: a) $\int_5^x \sqrt{e^t + 1} \, dt$ b) $\int_{x^2}^{\text{sen} x} (1 + \sqrt{t}) \, dt$

Solución:

a) Sea F(x) = $\int_5^x \sqrt{e^t + 1} \, dt$ y G(t) una primitiva de f(t) = $\sqrt{e^t + 1} \Rightarrow G'(t) = \sqrt{e^t + 1}$

Por la regla de Barrow : F(x) = $\int_5^x \sqrt{e^t + 1} \, dt = G(x) - G(5) \Rightarrow F'(x) = G'(x) - G'(5) = \sqrt{e^x + 1} - 0$

$= \sqrt{e^x + 1}$

b) Sea F(x) = $\int_{x^2}^{\text{sen} x} (1 + \sqrt{t}) \, dt$ y G(t) una primitiva de f(t) = $1 + \sqrt{t} \Rightarrow G'(t) = 1 + \sqrt{t}$

Por la regla de Barrow: F(x) = $\int_{x^2}^{\text{sen} x} (1 + \sqrt{t}) \, dt = G(\text{sen } x) - G(x^2) \Rightarrow$

$$F'(x) = G'(\text{sen } x) \cdot \cos x - G'(x^2) \cdot 2x = \left(1 + \sqrt{\text{sen } x}\right) \cdot \cos x - (1 + x) \cdot 2x$$

56. Dada la función $f(x) = ae^{x/3} + \dfrac{1}{x^2}$, $(x \neq 0)$ donde *a* es una constante,

a) Calcula $\int_1^2 f(x) \, dx$ en función de a

b) Se sabe que F es una primitiva de f. Calcular "a" si F(1) = 0 y F(2) = 1/2.

Solución:

a) $\int_1^2 (ae^{x/3} + \dfrac{1}{x^2}) \, dx = \left[3ae^{x/3} - \dfrac{1}{x}\right]_1^2 = 3a\left(e^{2/3} - e^{1/3}\right) + \dfrac{1}{2}$

b) Si F es una primitiva de f se tiene $\int_1^2 f(x) \, dx = F(2) - F(1)$ (Regla de Barrow)

$$\int_1^2 f(x) \, dx = 3a\left(e^{2/3} - e^{1/3}\right) + \frac{1}{2} = F(2) - F(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 0$$