Ejercicios de Matemáticas

1. Sea $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Calcula x e y para que MN = NM.

   b) Calcula M^{1997} y M^{1998}

   Solución:

   a) $MN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $NM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \Rightarrow y = 1, x = 0$

   b) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M$, $M^4 = I$, $M^5 = M$, ...

   Se ve que si el exponente es par es igual a la matriz unidad y si es impar es igual a M, por lo tanto $M^{1997} = M$ y $M^{1998} = I$.

2. Se sabe que $\begin{vmatrix} x & 5 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Explicando que propiedades de los determinantes se utilizan y sin desarrollar, calcular el valor de $\begin{vmatrix} y & 2y & y+2 \\ x & 2x+5 & x+2 \\ z & 2z+3 & z+2 \end{vmatrix}$.

   Solución:

$$\begin{vmatrix} y & 2y & y+2 \\ x & 2x+5 & x+2 \\ z & 2z+3 & z+2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} x & 2x & x+2 \\ y & 2y+5 & y+2 \\ z & 2z+3 & z+2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -\begin{vmatrix} x & 2x & x+2 \\ y & 2y & y+2 \\ z & 2z & z+2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 0 & x+2 \\ y & 5 & y+2 \\ z & 3 & z+2 \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -\begin{vmatrix} x & 0 & x+2 \\ y & 5 & y+2 \\ z & 3 & z+2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(4)}{=} -\begin{vmatrix} x & 0 & x \\ y & 5 & y \\ z & 3 & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ y & 5 & 2 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} -2\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 5 & 1 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

   (1) Al Permutar 1ª y 2ª fila el determinante cambia de signo.

   (2) Los elementos de la 2ª columna los descomponemos en dos sumandos.

   (3) El primer determinante tiene dos columnas proporcionales, por lo tanto es igual a cero.

   (4) Los elementos de la 3ª columna los descomponemos en dos sumandos.

   (5) El primer determinante tiene dos columnas iguales y por lo tanto es igual a cero, el segundo determinante tiene la 3ª columna multiplicada por 2 luego el determinante queda multiplicado por 2.

3. Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

 a) Estudiar si existe algún valor de $\lambda\in R$ para el cual se satisfaga $(A-\lambda I)^2=B$.

 b) Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&2\\1&1&3\end{vmatrix}=1$, determinar el valor de $\begin{vmatrix}x&1/4&4\\y&0&4\\z&1/2&12\end{vmatrix}$

 Solución:

a) $A-\lambda I=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}$

$$(A-\lambda I)^2=\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2+2&-2\lambda+1&-2\lambda\\-2\lambda+1&\lambda^2-2\lambda+2&1\\-2\lambda&1&1+\lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

Igualando, por ejemplo, los elementos a_{13}: $-2\lambda=-4\Rightarrow\boxed{\lambda=2}$.

Ahora basta comprobar que para $\lambda=2$ los restantes valores de ambas matrices son iguales.

b) $\begin{vmatrix}x&1/4&4\\y&0&4\\z&1/2&12\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}\begin{vmatrix}x&y&z\\1/4&0&1/2\\4&4&12\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}4\cdot\begin{vmatrix}x&y&z\\1/4&0&2/4\\1&1&3\end{vmatrix}\overset{(3)}{=}4\cdot\frac{1}{4}\cdot\begin{vmatrix}x&y&z\\1&0&2\\1&1&3\end{vmatrix}=\boxed{1}$

Propiedades aplicadas: (1) $|A|=|A^t|$ (2) y (3) Extraer el factor común ¼ de la 2ª fila y 4 de la 3ª fila

4. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}a^2&ab&ab\\ab&a^2&b^2\\ab&b^2&a^2\end{pmatrix}$

 a) Sin utilizar la regla de Sarrus, calcular el determinante de dicha matriz. [1,5 puntos]
 b) Estudiar el rango de A en el caso en que b = –a. [1 punto]

SOLUCIÓN.

a)
$$\begin{vmatrix}a^2&ab&ab\\ab&a^2&b^2\\ab&b^2&a^2\end{vmatrix}\overset{(1)}{=}a\begin{vmatrix}a&ab&ab\\b&a^2&b^2\\b&b^2&a^2\end{vmatrix}\overset{(2)}{=}a^2\begin{vmatrix}1&b&b\\b&a^2&b^2\\b&b^2&a^2\end{vmatrix}\overset{(3)}{=}a^2\begin{vmatrix}1&b&b\\0&a^2-b^2&0\\0&0&a^2-b^2\end{vmatrix}\overset{(4)}{=}a^2\begin{vmatrix}a^2-b^2&0\\0&a^2-b^2\end{vmatrix}\overset{(5)}{=}$$

$=a^2\cdot(a^2-b^2)^2$

Propiedades aplicadas: (1) y (2) sacar factor común a "a" en la primera columna y en la primera fila. (3) $F_2-b\cdot F_1$, $F_3-b\cdot F_1$
(4) y (5) Desarrollo por los elementos de la primera columna

b) Para b = –a, la matriz A es: $\begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \\ -a^2 & a^2 & a^2 \end{pmatrix}$ y como los tres vectores fila son linealmente dependientes, el rango de la matriz es 1.

5. Sean las matrices A= $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ donde x, y, z son desconocidos.

a) Calcular las matrices (AxB) + C y 3D.
b) Sabiendo que (AxB) + C = 3D, plantear un sistema de ecuaciones para encontrarlos valores de x, y, z.
b) Estudiar la compatibilidad del sistema. ¿Cuántas soluciones tiene?
c) Encontrar, si es posible, una solución.

Solución:

a)(AxB) + C = $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 2x & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \\ -x+y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y+2z \\ -x+y-z \end{pmatrix}$; $3D = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Queda: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+2z=0 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$

c) Por Gauss : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rango A = 2 = rango A^* < número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado, por lo tanto tiene infinitas soluciones.

d) Soluciones: –3y = –6 $\Rightarrow$ y = 2, x = 3 – y – z $\Rightarrow$ x = 1 – y $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$

Para cada valor real de *t* se obtiene una solución. Por ejemplo, si t = 0 sale x = 1, y = 2 y z = 0.

6. Demuestra la igualdad siguiente: $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = x(x-a)(x-d)(x-f)$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ 0 & x-a & d-b & e-c \\ 0 & 0 & x-d & f-e \\ 0 & 0 & 0 & x-f \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} x(x-a)(x-d)(x-f)$$

(1) A cada fila le restamos la anterior
(2) El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal

7. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Comprobar que $\det(A^2) = (\det(A))^2$

b) Estudiar si para cualquier matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de orden 2 se cumple que $\det(M^2) = (\det(M))^2$

c) Encontrar la relación entre los elementos de las matrices M cuadradas de orden 2 que satisfacen: $\det(M+I) = \det(M) + \det(I)$

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(A^2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Por otra parte: $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = -9+8 = -1 \quad \Rightarrow \quad (\det(A))^2 = (-1)^2 = 1$

Luego, en efecto: $\det(A^2) = (\det(A))^2$

b) $M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(M^2) = \begin{vmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{vmatrix} =$

$= (a^2+bc)\cdot(bc+d^2) - (ab+bd)\cdot(ac+dc) = a^2bc + a^2d^2 + b^2c^2 + bcd^2 - a^2bc - abcd - abcd - bcd^2 =$

$= a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd = (ad-bc)^2$

$\det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \Rightarrow \quad (\det(M))^2 = (ad-bc)^2$ luego en efecto: $\det(M^2) = (\det(M))^2 \quad \forall M$

c) $M + I = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(M+I) = (a+1)\cdot(d+1) - bc = ad + a + d + 1 - bc \quad (*)$

$\left.\begin{array}{r} \det(M) = ad - bc \\ \det(I) = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \det(M) + \det(I) = ad - bc + 1 \quad (*)$

Como las igualdades (*) han de ser iguales: $ad + a + d + 1 - bc = ad - bc + 1 \quad \Rightarrow \quad a + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -a$

luego las matrices M que satisfacen la relación fijada son de la forma: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

8. Calcular el rango de la matiz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, utilizando dos métodos distintos.

Solución:

A) Por determinantes: El rango de una matriz A de dimensión mxn es el orden del mayor menor no nulo. Como la matriz A no es la matriz cero, su rango es mayor o igual que 1. Para determinar si tiene rango ≥ 2, se busca un menor (determinante) de orden 2 no nulo.

Por ejemplo: $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$

Para determinar si tiene rango 3, partiendo del menor de orden 2 distinto de cero, se estudiarán todos los posibles menores de orden 3 que lo contengan. Si todos ellos son nulos, el rango de A es 2. Si por el contrario, alguno de ellos es distinto de cero, el rango es 3.

En este caso: $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ pero $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}A = 3$.

B) Por Gauss:

$$\text{Rango A} = \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 13 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = 3$$

9. Hallar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & a^2+a+1 & a \\ -1 & a-4 & a-2 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro. Indicar cuando existe la inversa de A (junio 1996)

Solución:

Como la matriz A es cuadrada calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & a^2+a+1 & a \\ -1 & a-4 & a-2 \end{vmatrix} = a^3 - a^2 - a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1,\ a = -1$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$ det (A) $\neq 0 \Rightarrow$ rango A = 3

Si a = 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, rango A = 1, (A tiene dos filas iguales y la tercera es proporcional)

Si a = −1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$, el rango de A es menor que tres pues det (A) = 0 y como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ $\Rightarrow$ rango A = 2.

La matriz A tiene inversa cuando $a \neq 1$ y $a \neq -1$ pues det (A) $\neq 0$.

10. Halla el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro a:

Solución:

Como la matriz A no es la matriz cero, su rango es mayor o igual que 1. Para determinar si tiene rango ≥ 2, se busca un menor (determinante) de orden 2 no nulo. Por ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Para determinar si tiene rango 3, partiendo del menor de orden 2 distinto de cero, se estudiarán todos los posibles menores de orden 3 que lo contengan.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (a - 2)\,(2a - 1) = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ y } a = ½$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-2)\,(2\,a^2-1) \Rightarrow a = 2 \text{ y } a = \pm\sqrt{1/2}\,.$$

Ambos menores de orden 3 se anulan a la vez para a = 2, por lo tanto: Si a = 2 rango A = 2 y si a≠2 rango A = 3 pues al menos uno de los menores de orden 3 es distinto de cero.

11. Estudia el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro a. ¿Existe algún valor de a para el que sea rango (M) = 1?.

Solución:

a) Por Gauss

$$\text{Rango } M = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2a & 1-a^2 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

$1 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

Si a = 1, Rango M = rango $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Si a = -1, Rango M = rango $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Si $a \neq \pm 1$, rango M = 3.

No existe ningún valor de a para el cual el rango M = 1, pues para a = 1 y a = –1 el rango es dos y para $a \neq \pm 1$ el rango es tres.

b) Por determinantes: $\det(M) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} = a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$

Si a≠ 1 y a ≠ −1 det(A) ≠ 0 y por lo tanto rango A = 3

Si a =1 A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, det (A) = 0, existe algún menor de orden 2 distinto de cero, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, por lo tanto rango A = 2.

Si a = −1 A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, det (A) = 0, existe algún menor de orden 2 distinto de cero, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, por lo tanto rango A = 2.

12. Halla el rango de la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & a-2 & a+1 \\ 1 & -1 & a^2+1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro a (2 puntos). ¿Tiene inversa cuando a = 0? (0,5 puntos).

Solución:

Rango $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & a-2 & a+1 \\ 1 & -1 & a^2+1 \end{pmatrix}$ = rango $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{pmatrix}$; el rango de la matriz será igual al número de filas no nulas. Si a – 1 = 0 la segunda fila tendré todos los elementos igual a 0. La tercera fila tendré todos los elementos nulos si $a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$ ó $a = -1$.

Si a ≠ 1 y a ≠ -1 el rango de A será 3

Si a = 1 rango A = rango $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y por lo tanto rango A = 1

Si a = – 1, rango A = rango $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y rango A = 2

¿Tiene inversa cuando a = 0? Si a = 0, a es distinto de 1 y de – 1, por lo tanto rango de A es 3 ⇒ el determinante de A será distinto de cero ⇒ tendrá inversa.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2-1-2+4+1+1 = 1 \neq 0$.

13. Calcular la matriz inversa de A = $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Se calcula | A | = $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$

b) Se calcula la matriz adjunta de A

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix},\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix},\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7,\ A_{21} = 0,\ A_{22} = -2,\ A_{23} = -2,$$

$$A_{31} = -2,\ A_{32} = 4,\ A_{33} = 6..$$

Entonces: Adj.(A) = $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

c) Se calcula la traspuesta de la adjunta: $(\text{Adj.}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

d) La matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\text{Adj.}(A)\right)^t = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

14. Halla una matriz X que verifique AX + B = C, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:
$AX + B = C$, $AX = C - B$, $A^{-1}(AX) = A^{-1}(C - B)$, $(A^{-1}A)X = A^{-1}(C - B)$, $I X = A^{-1}(C - B)$,
$X = A^{-1}(C - B)$
Vamos a calcular la matriz inversa de A, A^{-1}:

$$|A| = 8,\ \text{Adj. }(A) = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ [\text{Adj. }(A)]^t = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$C - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ ; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1/2 & -3/4 & 0 \end{pmatrix}$$

15. Halla los valores del parámetro p para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}$ no tiene inversa. ¿Tiene inversa para p = 2?. En caso afirmativo calcularla.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p+1 & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{vmatrix} = p^3 - p = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ p = \pm 1 \end{cases}$$

. Por lo tanto A no tiene inversa para p = 0, 1, −1. Para los demás valores hay inversa ⇒ tiene inversa para p = 2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $|A| = 6$,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6..$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix},\ [\text{Adj. }(A)]^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$ halla:

a) La matriz inversa de C.
b) La matriz X que verifique: AB + CX = D.
Solución:

a) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ la matriz C tiene inversa

$\text{Adj}(C) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $(\text{Adj.}(C))^t = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \dfrac{1}{|C|}(\text{Adj.}(C))^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

b) $AB + CX = D \Rightarrow CX = D - AB \Rightarrow C^{-1}(CX) = C^{-1}(D - AB) \Rightarrow (C^{-1}C)X = C^{-1}(D - AB) \Rightarrow X = C^{-1}(D - AB)$

$AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$; $D - AB = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>*Otra forma*</u>: $AB + CX = D \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} a + 2c = -2 \\ 3a + 4c = -6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a = -2 \\ c = 0 \end{matrix}\right.$, $\left.\begin{matrix} b + 2d = 3 \\ 3b + 4d = 7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} b = 1 \\ d = 1 \end{matrix}\right. \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

17. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar A^n para todo entero positivo *n*. [1 punto]
b) Calcular, si existe, la inversa de la matriz A y de la matriz $I_3 + A$. [1,5 puntos] (junio 2001)
Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En consecuencia, para $n \geq 3$, A^n es la matriz nula.

b) Como $|A| = 0$, la matriz A no tiene inversa

La matriz $I_3 + A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, y $|I_3 + A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ tiene inversa.

La matriz ajunta $\text{Adj}(I_3 + A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ a^2 & -a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [\text{Adj}(I_3 + A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (I_3 + A)^{-1} = \dfrac{[\text{Adj}(I_3 + A)]^t}{|I_3 + A|} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

18. Hallar una matriz $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de orden 2 tal que

$$A^{-1}\,X\,A=B \quad \text{siendo} \quad A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A^{-1}\,X\,A=B \;\Leftrightarrow\; X\,A=A\cdot B \;\Leftrightarrow\; X=A\cdot B\cdot A^{-1}$$

Calculemos A^{-1}: $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-3+2=-1$

$$\text{Adj}\,(A)=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\text{Adj}\,(A)\right)^t=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(\text{Adj.}(A)\right)^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}}$$

19. a) Probar que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$

b) Hallar la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+4y+9z=2 \end{cases}$ que además satisface que la suma de los valores correspondientes a cada una de las incógnitas es 4.

Solución:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b+a)\,(b-a) & (c+a)\,(c-a) \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}=$$

$$\overset{(4)}{=} (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ b+a & c+\cancel{a}-b-\cancel{a} \end{vmatrix} \overset{(5)}{=} (b-a)(c-a)(c-b)$$

Propiedades utilizadas:
(1) C2 – C1, C3 – C1
(2) Desarrollo por los adjuntos de la primera fila
(3) Sacar factor común en ambas columnas
(4) C2 – C1
(5) Desarrollo por los adjuntos de la primera fila

b) Se debe añadir a las dos ecuaciones dadas la ecuación $x+y+z=4$: $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+4y+9z=2 \\ x+y+z=4 \end{cases}$

Para resolverlo, aplicamos la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{6+72-48-4}{4+3+18-12-2-9}=\frac{26}{2}=13 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{2+12-6-36}{2}=\frac{-28}{2}=-14$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{16+4-2-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Por tanto: $\boxed{x = 13\ ,\ \ y = -14\ ,\ \ z = 5}$

20. Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{cases}$

Solución: Vamos a resolverlo por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 7 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 11 & -22 \end{array}\right) \Rightarrow 11\,z = -22 \Rightarrow z = -2\,.$$

$5y + 7z = -4 \Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2$; $2x + y + z = -2 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$

Solución: $x = -1$, $y = 2$. $z = -2$

21. Se considera el sistema $\begin{cases} x - y + \quad z = 6 \\ -x - y + (a-4)z = 7 \\ x + y + \quad 2z = 11 \end{cases}$

a) Discútase según los valores del parámetro real a.
b) Resuélvase para a = 4.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & a-4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & a-3 & 13 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & a-3 & 13 \\ 0 & 0 & a-2 & 18 \end{pmatrix}$

Si $a \neq 2 \Rightarrow$ rango A = 3 = rango A^* = número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

Si a = 2 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$, rango A = 2 $\neq$ rango A^* = 3 $\Rightarrow$ el sistema es incompatible

b) Para a = 4 el sistema será compatible determinado.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \end{pmatrix}$ $2z = 18 \Rightarrow z = 9$, $-2y + 9 = 13 \Rightarrow -2y = 4 \Rightarrow y = -2$, $x - 9 - 2 = 6 \Rightarrow x = -5$

22. Estudiar según los valores del parámetro a el sistema. $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ ax + (a+3)y + 3z = 1 \end{cases}$

Solución:

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a & a+3 & 3 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ a & a+3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Vamos a calcular el rango de A:

El rango de A es distinto de cero pues | 1 | $\neq$ 0. Menores de orden dos que contengan a | 1 |:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & a+3 \end{vmatrix} = a + 3 - 2a = -a + 3 = 0 \Rightarrow a = 3$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 3 \end{vmatrix} = 3 - a = 0 \Rightarrow a = 3$. El rango de A será 1 si a = 3 y rango A = 2 si $a \neq 3$.

Si $a \neq 3$ rango A = rango A^*= 2 < número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

Si a = 3 rango A = 1

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } A^* = 2 \neq \text{rango } A \Rightarrow \text{el sistema es incompatible.}$$

23. Discutir según los valores de "**a**" el sistema:.

$$\left.\begin{aligned} (1-a)x + (2a+1)y + (2a+2)z &= a \\ ax + ay &= 2a+2 \\ 2x + (a+1)y + (a-1)z &= a^2 - 2a + 9 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Hallaremos los valores de que anulan det (A)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & 2a+1 & 2a+2 \\ a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \end{vmatrix} = -a^3 + 3a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(-a^2+3a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -a^2 + 3a - 2 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases} \end{cases}$$

a) Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ y $a \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ rango A = rango A^*= 3 = número de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible determinado.

b) Si a = 0, (|A| = 0 $\Rightarrow$ rango A < 3), $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A^* = 3 .$$

Por lo tanto: rango A = 2 $\neq$ rango A^*= 3 $\Rightarrow$ sistema incompatible.

c) Si a = 1, (|A| = 0 $\Rightarrow$ rango A < 3), $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow$ rango A = 2

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rango } A^* = 2$$

rango A = rango A^*= 3 < nº de incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible indeterminado.

d) Si a = 2, (|A| = 0 $\Rightarrow$ rango A < 3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -26 \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A^* = 3$$

rango A = 2 $\neq$ rango A^*= 3 $\Rightarrow$ sistema incompatible.

24. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro m y resolverlo:

$$\begin{cases} x-2my+3z=0 \\ 2x-3y+mz=0 \\ \quad\quad y+2z=0 \end{cases},$$

Solución:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2m & 3 \\ 2 & -3 & m \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=7m=0\Rightarrow m=0$$

Si m ≠ 0 ⇒ | A | ≠0 ⇒ rango A = 3 = número de incógnitas ⇒ sistema compatible determinado; solo admite la solución trivial: x = 0, y = 0, z = 0.

Si m = 0. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces rango A = 2 < nº de incógnitas ⇒ el sistema es compatible indeterminado.

Solución: $\left.\begin{array}{r} -y-2z=0\Rightarrow y=-2z \\ x+3z=0\Rightarrow x=-3z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=-3t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$

25. Discutir el sistema $\begin{cases} ax+\quad\quad y+\ z=1 \\ x\quad\quad\quad\quad +\ z=1 \\ x+(a-1)y+az=1 \end{cases}$ según los valores del parámetro a.

Resolverlo en los casos en los que el sistema sea compatible.

Solución:

Si rango A = rango A^* = 3 (nº de incógnitas) el sistema será compatible determinado. Veamos que valores de **a** anulan al determinante de A, para esos valores ya no es posible que sea determinado.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix}=-a^2+a=0\Leftrightarrow\begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

a) Si a ≠ 0 y a ≠ 1, | A | ≠ 0 ⇒ rango A = rango A^* = 3 = número de incógnitas, el sistema es compatible determinado:

b) Si a = 0 (|A| = 0 ⇒ rango A < 3) A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow$ rango A = 2,

$A^*=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, y $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ ⇒ rango A^* = 3 ⇒

Por lo tanto rango A = 2 ≠ rango A^* = 3 ⇒ Sistema Incompatible.

c) Si a = 1 (|A| = 0 ⇒ rango A < 3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow$ rango A = 2

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ y como la segunda y tercera fila son iguales $\Rightarrow$ rango $A^* = 2$

Rango A = 2 = rango A^* < número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado:

Resolución del sistema:

Si a = 1

$$\left.\begin{matrix} x + y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 1 - z \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix}}{a(1-a)} = \frac{1}{a}; \quad x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{a(1-a)} = \frac{1-a}{a}; \quad x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \end{vmatrix}}{a(1-a)} = \frac{a-1}{a}$$

26. Un autobús de la Universidad transporta en hora punta 80 viajeros de tres tipos: 1) Viajeros que pagan el billete entero, que vale 75 pta. 2) Viajeros con bono de descuento del 20%. 3) Estudiantes con bono de descuento del 40%. La recaudación del autobús en ese viaje fue de 3975 pta. Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de estudiantes era el triple que el número del resto de viajeros.
Solución:
Sean x los viajeros que pagan billete completo, y los que tienen un 20% de descuento, y z los estudiantes, que tiene un 40% de descuento.

Se cumple que: $\begin{cases} x + y + z = 80 \\ 75x + 0{,}8 \cdot 75y + 0{,}6 \cdot 75z = 3975 \\ z = 3(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 80 \\ 75x + 60y + 45z = 3975 \\ 3x + 3y - z = 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 75 & 60 & 45 & 3975 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & -15 & -30 & -2025 \\ 0 & 0 & -4 & -240 \end{pmatrix} \Rightarrow -4z = -240 \Rightarrow z = 60,\ y = 15,\ x = 5$

27. *Luis, Juan* y *Oscar* son tres amigos. *Luis* le dice a *Juan:* Si yo te doy la tercera parte del dinero que tengo, los tres tendremos la misma cantidad. Calcular lo que tiene cada uno de ellos sabiendo que entre los tres reúnen 60 euros. (Jun. 2003)

Solución:

Sean x, y, z las cantidades de dinero que tienen Luis, Juan y Oscar, respectivamente.
Se cumple que:
x + y + z = 60 (entre los tres reúnen 60 euros)
$\frac{2}{3}x = y + \frac{1}{3}x = z$ (Si Luis da la tercera parte a Juan, los tres tienen lo mismo)
Despejando en la segunda expresión se tiene:
$y = \frac{1}{3}x$; $z = \frac{2}{3}x$
Sustituyendo en la primera ecuación:
$x + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x = 60 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow y = 10,\ z = 20$

28. Cuando el año 1800 Beethoven escribe su primera Sinfonía, su edad es diez veces mayor que la del jovencito Franz Schubert. Pasa el tiempo y es Schubert quien compone su célebre Sinfonía Incompleta.

Entonces la suma de las edades de ambos músicos es igual a 77 años. Cinco años después muere Beethoven y en ese momento Schubert tiene los mismos años que tenía Beethoven cuando compuso su primera Sinfonía. Determinar el año de nacimiento de cada uno de estos dos compositores (Jun. 2004)

Nota: Solamente se calificarán los resultados obtenidos matemáticamente, no los derivados de los conocimientos histórico-musicales del examinando.

Solución:

Llamamos x a la edad de Schubert en 1800.

Con los datos del problema se obtiene la siguiente tabla:

		Beethoven	Schubert	Relación
1ª sinfonía	1800	10x	x	
t años después	1800 + t	10x + t	x + t	11x + 2t = 77
5 años después	1800 + t + 5	10x + t + 5	x + t + 5	x + t + 5 = 10x

Se tiene el sistema

$$\begin{cases} 11x + 2t = 77 \\ x + t + 5 = 10x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x + 2t = 77 \\ 9x + t = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 3$$

Luego, en 1800 Schubert tenía 3 años y Beethoven, 30. Habían nacido, respectivamente, en 1797 y en 1770.

29.a) Determina el valor de m para que los vectores $\vec{u} = (m, -1, 0)$, $\vec{v} = (1, 2, -1)$ y $\vec{w} = (0, 1, 2)$ sean linealmente dependientes. ¿Forman base de R^3 para m = 1?. ¿Y para $m = -\frac{2}{5}$?. Razona la respuesta.

b) Sea la matriz cuyas filas son los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. ¿Para qué valores de m tiene inversa?. Calcularla si es posible para m = 0.

Solución:

a) Los vectores $\vec{u} = (m, -1, 0)$, $\vec{v} = (1, 2, -1)$ y $\vec{w} = (0, 1, 2)$ son linealmente dependientes si rango $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ < $3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5m + 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2}{5}$.

Si $m \neq \frac{-2}{5}$, los tres vectores son linealmente independientes.

Para m = 1 los vectores son linealmente independientes y como dimensión de R^3 es 3 $\Rightarrow$ 3 vectores de R^3 linealmente independientes forman base $\Rightarrow$ forman base.

Si $m = \frac{-2}{5}$ los vectores son linealmente dependientes $\Rightarrow$ no forman base

b) Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si su determinante es distinto de cero, por lo tanto la matriz tendrá inversa si $m \neq \frac{-2}{5}$.

Para m = 0 tiene por lo tanto inversa.

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; Det (A) = 2, Adj (A) = $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [\text{Adj (A)}]^t = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

30.a) Discute según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales: .

$$\begin{cases} x + my - z = 0 \\ 2x + y + mz = 0 \\ x + 5y - mz = m+1 \end{cases}$$

b) Resuelve el sistema para m = 2. .

Solución:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 5 & -m \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & 0 \\ 2 & 1 & m & 0 \\ 1 & 5 & -m & m+1 \end{pmatrix}$

Si rango A = rango A^* = 3 (nº de incógnitas) el sistema será compatible determinado. Veamos qué valores de **m** anulan al determinante de A, para esos valores ya no es posible que sea determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & 5 & -m \end{vmatrix} = 3m^2 - 6m - 9 = 0;\ m^2 - 2m - 3 = 0 \Rightarrow m = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Si $m \neq 3$ y $m \neq -1$, $|A| \neq 0 \Rightarrow$ rango A = rango A^* = 3 = número de incógnitas, el sistema es compatible determinado:

Si m = 3 ($|A| = 0 \Rightarrow$ rango A < 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2,

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix};\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A^* = 3$$

Por lo tanto rango A = 2 ≠ rango A^* = 3 ⇒ Sistema Incompatible.

Si m = –1 ($|A| = 0 \Rightarrow$ rango A < 3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ y como tercera columna es nula ⇒ rango A^* = 2

Rango A = 2 = rango A^* < número de incógnitas ⇒ el sistema es compatible indeterminado.

b) Resolución del sistema: Si m = 2 ($m \neq 3$ y $m \neq -1$) ⇒ el sistema es compatible determinado.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 6\cdot 2 - 9 = -9$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-15}{9} = -\frac{5}{3};\quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-12}{-9} = \frac{4}{3};\quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{-9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -5/3 \\ y = 4/3 \\ z = 1 \end{cases}$$

31.Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Halla el valor de $m \in R$ para el que la matriz A no tiene inversa.

d) Resuelve la ecuación AX = O para m = 3 (Razona la respuesta)

Solución:

a) La matriz A no tendrá inversa cuando $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{vmatrix} = 1 - m + m - 4 - 1 - 2 + 2m = 0 \Rightarrow 2m - 6 = 0 \Rightarrow m = 3$$

Por lo tanto <u>A no tiene inversa</u> si m = 3

b) El sistema es homogéneo: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{cases}$

Rango A < 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rango A = 2 < número de incógnitas $\Rightarrow$
Podemos eliminar la última ecuación, ya que será combinación lineal de las otras dos. El sistema quedará de la forma.

$$\begin{cases} y = -x \\ y + z = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases}$$

32. Siendo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de A
b) Halla una matriz X que verifique AX + B = C.

Solución:

a) A tendrá inversa si det (A) $\neq$ 0

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6 \Rightarrow \text{tiene inversa.}$$

$$Adj\,(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (Adj\,(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$$

b) $AX + B = C \Rightarrow AX = C - B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}(C - B) \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}(C - B) \Rightarrow I X = A^{-1}(C - B) \Rightarrow$

$$X = A^{-1}(C - B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

33. Considerar la matriz A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & m \end{pmatrix}$ siendo m un parámetro real. Se pide:

a) Discutir si existe solución según los valores del parámetro m del sistema de ecuaciones lineales: $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En caso afirmativo, resolver el sistema.

b) Para m = 7, considerar el sistema de ecuaciones lineales: $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Discutir si existe solución.

Solución:

a) Utilizaremos el método de Gauss para discutir y resolver el sistema homogéneo de ecuaciones lineales.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & m & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & m-9 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & m-7 & 0 \end{pmatrix}, m - 7 = 0 \Rightarrow m = 7$$

Si $m \neq 7 \Rightarrow$ rango A = 3 = Rango A^* = número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado. La solución es: x = 0, y = 0, z = 0.

Si m = 7 , $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rango A = 2 = Rango A^* < número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

Soluciones: $y - 2z = 0 \Rightarrow y = 2z$, $x + y + 3z = 0 \Rightarrow x = -y - 3z = -5z \Rightarrow \begin{cases} x = -5z \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$

b) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}}_{A^*}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } A \neq 2 = \text{Rango } A^* = 3 \Rightarrow$$ el sistema es incompatible.

34. Discute el siguiente sistema y resuélvelo cuando sea posible: $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$

Solución:

Utilizaremos el método de Gauss para discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales.

Intercambiamos la primera con la segunda ecuación: $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & m-15 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 2^a+1^a(-2) \\ 3^a+1^a(-5) \end{array}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m-10 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ 3^a-2^a \end{array}$ $m-10 = 0 \Rightarrow$

$m = 10$

Si $m \neq 10 \Rightarrow$ rango A = 2 $\neq$ Rango A^* = 3 $\Rightarrow$ el sistema es incompatible

Si m = 10, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ rango A = 2 = Rango A^* < número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado (tiene infinitas soluciones).

$5y - 3z = -5 \Rightarrow y = \dfrac{-5+3z}{5}$, $x = 3 + 2y - z \Rightarrow x = 3 + \dfrac{-10+6z}{5} - z = \dfrac{5+z}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5+t}{5} \\ y = \dfrac{-5+3t}{5} \\ z = t \end{cases}$

35. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, resolver por el método de Gauss:

a) El sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es A^tA.
b) El sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es AA^t.

Solución:

a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

El sistema que tenemos que resolver es: $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right); \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right); \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 \end{array}\right); \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, el rango de la matriz de los coeficientes es 2 < número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

$-y - 3z = 0 \Rightarrow y = -3z$, $x + y + 2z = 0 \Rightarrow x = -y - 2z = 3z - 2z = z \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$

b) $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.El sistema que tenemos que resolver es: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \end{array}\right)$, el rango de la matriz de los coeficientes es 2 = número de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado: x = 0, y = 0